Die Schraubenlinien.

Eine monographische Darstellung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

vereinigten Friedrichs-Universität

Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Frieda Nugel

aus Kottbus.

Halle a. S.
Hofbuchdruckerei C. A. Kaemmerer & Co.
1912.

Referent: Professor Dr. **Gutzmer.**

Fräulein **Marie Kröner** und dem Andenken an

Wilhelm Kröner.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544726_0041

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit will eine Monographie der Schraubenlinien vorstellen. Sie behandelt in ihrem ersten Teil die gemeine Schraubenlinie, während im zweiten und dritten Teil die allgemeinen Schraubenlinien betrachtet werden. Nach den vorhandenen Arbeiten, die die Schraubenlinien untersuchen, werden ihre Eigenschaften zusammengestellt; z. T. wird die Untersuchung weiter gefördert.[1]) Bisher existiert außer einem kurzen, inhaltreichen, zusammenfassenden Artikel von Scheffers in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften: III D 4 (1903) nur eine Monographie der gemeinen Schraubenlinie von Renfer: Über Schraubenlinien und Schraubenflächen. Dissertation Bern 1900. R. behandelt das Thema in seinem eigenen Rahmen nicht erschöpfend; außerdem sind die Literaturangaben recht dürftig; ich versuchte, in dieser Beziehung durch den ersten Teil meiner Arbeit Renfer zu ergänzen. Der erwähnte Enzyklopädie-Artikel gibt naturgemäß nur das Wichtigste über unser Thema. Er berücksichtigt vornehmlich die neuere Literatur, während ich versuchte, sämtliche Arbeiten über die Schraubenlinien zu verwerten. Dabei konnte ich einige historische und sachliche Irrtümer, die sich in der Literatur finden, richtig stellen; hierüber geben die Fußnoten an den betreffenden Stellen Auskunft.

Über die von mir benutzte Literatur lege ich auf S. 74 ff. Rechenschaft ab; ich nenne in Teil II des Literaturverzeichnisses von allen durchgesehenen Werken nur die, die auf Schraubenlinien und Schraubenflächen Bezug nehmen.

1) Vgl. z. B. S. 58 ff. und S. 63 ff.

Die in neuerer Zeit erschienenen ließen sich leicht an der Hand der Angaben von Scheffers a. a. O. und des Jahrbuchs der Fortschritte der Mathematik zusammenstellen. Schwieriger war es, die älteren Arbeiten zu finden, da man bekanntlich in älterer Zeit nicht allzu sorgsam zitierte. Außer den Literaturverzeichnissen von Rogg, Ersch und Felix Müller und den größeren Werken über Geschichte der Mathematik durchsuchte ich eine große Anzahl von Antiquariatskatalogen, die mir Herr Prof. Dr. Gutzmer in liebenswürdiger Weise zur Verfügung stellte. Ferner sah ich viele mathematische Journale nach Artikeln über Schraubenlinien durch.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor Dr. Gutzmer in Halle auch an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank auszusprechen nicht nur dafür, daß er die vorliegende Arbeit angeregt und mit stetem wertvollen Rat ihre Ausarbeitung gefördert hat, sondern vor allem auch für sein liebenswürdiges Interesse, das er meinen Arbeiten während meiner Hallenser Studienzeit stets entgegenbrachte.

Auch Herr Professor Dr. Salkowski in Charlottenburg lieh mir für diese Abhandlung oft seinen sachkundigen Rat, für den ich ihm auch an dieser Stelle verbindlichst danke.

Einleitung.

Die gemeine Schraubenlinie, die Kurve konstanter Steigung auf dem Rotationszylinder, ist schon den Mathematikern des Altertums bekannt gewesen. Leider ist das älteste Werk, das über die Kurve berichtet haben soll, nicht erhalten. Chasles[1]) schreibt darüber: „Dem Geminus, von dem man annimmt, daß er kurz nach 150 v. Chr. gelebt hat, schreibt man ein Werk[2]) über verschiedene Kurven zu, unter andern über die Schraubenlinie, die auf der Oberfläche eines geraden Kreiszylinders geschrieben ist. Er bewies von ihr die Eigenschaft, die sie mit der Geraden und dem Kreise gemein hat, daß sie nämlich beständig sich gleich bleibt.“ Auch Pappus[3]) kannte die Schraubenlinie. Er erwähnt sie in Satz 28 bei der Beschreibung der schraubenförmigen Oberfläche, die von den Loten aus den einzelnen Punkten der Kurve auf die Zylinderaxe gebildet wird, also der Wendelfläche.

Nähere Untersuchungen über die Schraubenlinie lassen sich für das Altertum und das ganze Mittelalter nicht feststellen. Sie beginnen erst im 17. Jahrhundert mit Guido Ubaldus.[4])

---

1) Chasles: Geschichte der Geometrie. Deutsch von Sohncke. Halle 1839.

2) Nach Cantor: Geschichte der Mathematik Bd. 1. soll der Titel gelautet haben: *Περὶ τῆς τῶν μαθημάτων τάξεως.*

3) Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Frederico Commandino in latinum conversae et commentariis illustratae. Pisani 1588 und Boniae 1660. Ich zitiere nach Chasles a. a. O. S. 28.

4) Guido Ubaldi e Marchionibus Montis: De cochlea. Libri quatuor. Venetiis 1615.

I. Kapitel.

Die gemeine Schraubenlinie.

1. Definition und analytische Darstellung.

Die gemeine Schraubenlinie ist die Kurve, die der Endpunkt des Radius der Basis eines geraden Kreiszylinders beschreibt, wenn der Radius sich in gleichförmiger Bewegung um die Zylinderaxe dreht, während er, immer parallel zur Horizontalebene bleibend, gleichzeitig sich proportional zum Drehwinkel von dieser Ebene erhebt.[1]) Die Kurve führt den lateinischen Namen Helix.[2])

Man kann sich die Schraubenlinie auch entstanden denken aus der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, das man so um einen geraden Kreiszylinder wickelt, daß eine Kathete mit dem Grundkreis des Zylinders zusammenfällt.[3]) Daraus ergibt sich, daß die Höhen, die die Helix

1) Diese Definition gibt Kaestner: Ad theoriam cochleae pertinens observatio geometrica. Dissertationes math. et. phys. Altenburg 1771. Ähnlich begegnet sie uns auch bei Magnus: Aufgaben aus der analytischen Geometrie des Raumes. Berlin 1837.

2) Nach Henricus Gulden: De helice sive theoria helicis geometrice determinata, praxi et usui civili accommodato. Acta societatis Jablonovianae. Tomus V. Lipsiae 1780 ist der Name „Helix" für die Kurve von einer gewissen Pflanzenart genommen. Gulden denkt dabei wahrscheinlich an den gemeinen Epheu = Hedera Helix. Auch von der schneckenartig gewundenen Form der Kurven kann sie den Namen erhalten haben (Schnecke = Helix, Helicidae.); den Namen Helix gibt schon Guido Ubaldus a. a. O. der Kurve.

3) Diese Entstehungsweise der Schraubenlinie ist fast ausnahmslos in den älteren Abhandlungen und Lehrbüchern der Betrachtung zu Grunde

auf den Mantellinien des Zylinders abschneidet, in konstantem Verhältnis zu den entsprechenden Grundkreisbögen, den krummlinigen Abzissen, stehen und daß die Kurve diese Mantellinien unter konstantem Winkel schneidet.[1]) Dieser Winkel ergänzt den Winkel der Kurve mit der Horizontalebene, den Steigungswinkel der Schraubenlinie, zu $\frac{\pi}{2}$.

Für die analytische Darstellung der Kurvenpunkte werde ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde gelegt. Die Zylinderaxe werde zur z-Axe gewählt, die x-Axe gehe durch den Anfangspunkt der Helix, der in der Entfernung r vom Nullpunkt des Systems sich befindet. Jeder

---

gelegt. Ich nenne: Guido Ubaldus a. a. O. Pitot: Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs appellée la compagne de la cycloide. Nachschrift. Histoire de l'académie royale des sciences. Année 1724. Karsten: Lehrbegriff der gesamten Mathematik II 2. Geometrie und höhere Analysis. Greifswald 1786. Umpfenbach: Analytische Geometrie, Mainz 1823. Pitot untersucht die Schraubenlinie zum ersten Mal mit Hilfe von Koordinaten. Nach M. Cantor: Geschichte der Mathematik III. S. 418 soll schon Parent: „Essais et recherches de mathematique et de physique" II. S. 684 (1702) die Schraubenlinie mit Hilfe von 3 Koordinaten untersucht haben. Das ist aber ein Irrtum. Parent untersucht eine Kurve, die um eine Art abgestumpften Kegel gewunden ist. x y z sind bei ihm die Radien dreier gerader Schnitte dieses Körpers, die durch drei übereinander liegende Punkte dreier Windungen der Kurve gelegt sind. Sie sind also nicht zu verwechseln mit unsern Koordinaten x y z.

1) Diese Eigenschaft begegnet uns zuerst bei Umpfenbach a. a. O. Zur Definition benutzen diesen Satz Cauchy: Application du calcul infinitésimal à la géométrie 1826. E. G. Grebe: De linea helice ejusque projectionibus orthographicis commentatio. Marburger Dissertation 1829. Leroy: Géométrie descriptive. Deutsch von Kauffmann 1838. Da die Mantellinien des Rotationszylinders seine Meridiane sind, fallen die gewöhnlichen Schraubenlinien mit den Loxodromen des Zylinders zusammen. E. W. Grebe: Über die Loxodromen auf gemeinen Zylindern und Kegeln, Archiv der Math. und Phys. 2, 1842 und Boymann: Entwicklung der Gleichungen der Loxodromen auf den Flächen zweiter Ordnung. Archiv 7, 1846 und Grunert: Archiv, 1853 stellen die Gleichungen der Zylinderloxodromen auf, aber ohne die Kurven Schraubenlinien zu nennen.

Punkt der Kurve ist dann durch die Gleichungen bestimmt: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = a\,r\,t$,[1]) wobei r der Zylinderradius, a die Tangente des Steigungswinkels, t der variable Winkel ist, um den sich der bewegliche Radius von der Anfangslage entfernt.

Die Projektionen auf die Koordinatenebenen haben die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ferner $$y = r \sin \frac{z}{a\,r}$$

und $$x = r \cos \frac{z}{a\,r}.$$[2])

Die Projektion auf die x y-Ebene ist also ein Kreis, der identisch ist mit dem Grundkreis des Zylinders; für die beiden andern Ebenen ergeben sich als Projektionen Sinuslinien, die kongruent,

aber um die Phase $\frac{\pi}{2}$ gegen einander verschoben sind.

---

1) Cauchy a. a. O. gibt zum ersten Mal die Gleichungen der Schraubenlinie in dieser Form. Vorher stellte man die Kurve durch die Gleichungen dar:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$z = a\,r \arcsin \frac{y}{r},$$

die wir Kaestner (1771) a. a. O. verdanken.

2) Hier ist außer den erwähnten Arbeiten von Kaestner, Umpfenbach und Grebe noch Brandes: Lehrbuch der höheren Geometrie II. 1824 zu nennen, der aus der Form der Gleichungen den Schluß zieht, daß die Projektionen nicht die einer ebenen Kurve sein können.

Die Gleichungen der Projektionen stellt auch auf Monge: Application de l'analyse à la géométrie. 4e éd. 1809. Die erste Auflage erschien unter dem Titel Monge: Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie. Paris 1795.

2. Rektifikation der gemeinen Schraubenlinie.

Die Länge eines Bogens der Schraubenlinie ist leicht zu bestimmen aus der Bemerkung, daß sie aus der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks entsteht. Für die Länge einer ganzen Windung würde sich also ergeben, da $t = 2\pi$,

$$s = \sqrt{4 r^2 \pi^2 + 4 a^2 r^2 \pi^2} = 2 r \pi \sqrt{1 + a^2}.$$

Ebenso einfach gestaltet sich die Rechnung bei Anwendung der allgemeinen Formel

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

sie ergibt:

$$s = r t \sqrt{1 + a^2}.$$ [1])

Die ganze Länge der Schraubenlinie besteht aus unendlich vielen Windungen; jede folgende wird durch Umwicklung eines zum ersten kongruenten Dreiecks um den Zylinder erhalten. Aus dieser Entstehungsart folgt übrigens, daß die Schraubenlinie geodätische Linie auf dem Zylinder ist.[2])

3. Schmiegungsebene und Tangente, Normalebene und Normalen der Schraubenlinie.

Die Schmiegungsebene einer Kurve, auch Krümmungs- oder Oskulationsebene genannt, geht durch drei benachbarte

---

1) Die Bestimmung des Bogens der Helix ist zuerst von Pitot (1724) a. a. O. ausgeführt worden. Karsten (1786) a. a. O. schließt an die Berechnung des Kurvenbogens die Bemerkung, daß der Bogen gleich der Tangente im Endpunkte von dort bis zum Schnitt mit der Basisebene ist. Einen besonderen Bogen berechnet Pelissier: Nouvelles annales XIII 1874, Question 1033, nämlich den, bei dem die Tangenten an den Endpunkten sich schneiden. Er zeigt, dass es darauf hinauskommt, einen Winkel zu finden, der zahlenmäßig so groß ist wie seine Tangente; denn er erhält zur Bestimmung der Projektion x des gesuchten Bogens die Gleichung $\operatorname{tg} \frac{x}{2r} = \frac{x}{2r}$.

2) Die erste Bemerkung darüber trifft man bei Leroy a. a. O.

Kurvenpunkte. Sie enthält die Hauptnormale und zwei benachbarte Tangenten und wird allgemein durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt. Für die Helix,[1]) deren Axe die z-Axe ist,[2]) erhält die Gleichung die Form:

$$a\,(x\,y_1 - y\,x_1) + r\,(z - z_1) = 0.$$

Von diesen Schmiegungsebenen der Schraubenlinie muß ein eigenartiger Satz erwähnt werden: „Konstruiert man in allen Punkten, die eine Schraubenlinie mit irgend einer Ebene π gemein hat, die Krümmungsebenen der Kurve, so schneiden sich diese sämtlich in einem auf π liegenden Punkte P. Und wenn die Ebene π um eine ihrer Geraden g gedreht wird, so beschreibt der dazugehörige Punkt P ebenfalls eine Gerade g_1. Die Schraubenlinie hat also bezüglich ihrer Krümmungsebenen dieselbe Eigenschaft, wie die Raumkurve dritter Ordnung.“[3])

Reye, der diesen Satz durch synthetische Untersuchungen gewonnen hat, gibt für ihn auch den analytischen Beweis. Er stellt zunächst die Gleichung der Schmiegungsebene auf

$$(G) \qquad z - z_1 = \frac{k}{r^2}\,(x_1\,y - y_1\,x)$$

---

1) Von der Schmiegungsebene handelt schon Kaestner a. a. O. (1771), allerdings ohne ihr den Namen zu geben. Er bemerkt, daß die Ebene durch drei benachbarte Punkte stets das Lot auf die Axe, die Hauptnormale, enthält und daß die Schnittgerade konsekutiver Schmiegungsebenen die Tangente der Kurve ist. Brandes a. a. O. (1824) erwähnt, daß die Bestimmung der „anschließenden Ebene“ eine Kurve als eine ebene oder doppelt gekrümmte erkennen lasse, denn bei ebenen Kurven bleibt diese Ebene für alle Punkte gleich.

2) Diese Annahme soll im folgenden durchweg gemacht werden.

3) Man verdankt diesen Satz Reye: Bemerkenswerte Eigenschaft der Schraubenlinie. Zeitschrift für Mathematik XV, 1870.

und nimmt dann an, $x_1\ y_1\ z_1$ seien die Koordinaten eines beliebigen Punktes P im Raum. Dann bestimmt die Gleichung (G) eine feste, durch P gehende Ebene π, so daß also jedem Punkt des Raumes eine durch ihn gehende Ebene zugeordnet ist. Da aber in (G) die $x_1\ y_1\ z_1$ mit $x\ y\ z$ vertauscht werden können, ohne daß die Gleichung sich ändert, so ist also jedem Punkte $(x\ y\ z)$ in der dem Punkte $(x_1\ y_1\ z_1)$ zugeordneten Ebene eine durch $x_1\ y_1\ z_1$ gehende Ebene zugeordnet. Oder: Wenn ein Punkt sich in einer Ebene π bewegt, so dreht sich seine zugeordnete Ebene um den zu π zugeordneten Punkt. Damit ist der erste Teil des obigen Satzes bewiesen; denn so oft der bewegliche Punkt die Schraubenlinie trifft, fällt seine zugeordnete Ebene mit seiner Krümmungsebene zusammen. — Sind nun durch eine Gerade (g) beliebig viele Ebenen gelegt, so liegen deren zugeordnete Punkte in einer Geraden (g_1); denn wenn ein Punkt in (g) also auch in allen jenen Ebenen sich bewegt, so muß sich seine zugeordnete Ebene um alle jene Punkte drehen, was nur dann möglich ist, wenn sie in einer Geraden liegen.

Zwei aufeinander folgende Schmiegungsebenen schneiden sich in der Tangente der Kurve. Für die Helix wird die Tangente dargestellt durch die Gleichungen:

$$\frac{x_1 - x}{-r\sin t} = \frac{y_1 - y}{r\cos t} = \frac{z_1 - z}{a\,r}.$$ [1]

Sämtliche Durchschnittspunkte der Tangenten an die Helix mit der Ebene des Basiskreises liegen in der Evolvente des Kreises;[2] denn jeder Punkt ist gleichzeitig der Schnittpunkt der Tangente mit der entsprechenden Tangente des Grundkreises und daher von dem Berührungspunkt dieser

1) Die Gleichungen der Tangenten an die rechts- und linksgewundene Helix, allerdings in wenig übersichtlicher Form, finden sich zuerst bei Grebe (1829) a. a. O.

2) Diese Bemerkung macht Horn: Über die Keradoiden oder Spirallinien doppelter Krümmung. Crelles Journal Bd. 2. 1827. Er erhält die Schraubenlinie als arithmetische Keradoide.

Tangente um die Länge des betreffenden Kreisbogens entfernt.

Die Tangenten an eine Schar von homoaxialen Schraubenlinien stehen in besonderen Beziehungen: „Die Tangenten, die durch einen Punkt des Raumes an eine Schar von homoaxialen Schraubenlinien derselben Ganghöhe gelegt werden, bilden einen Kegel zweiten Grades, dessen eine Diametralebene durch die Axe geht und dessen andere parallel zur Axe ist, diese letzte enthält eine zur Axe parallele Erzeugende. Die senkrechten Schnitte zu dieser Erzeugenden sind Kreise.“ Ferner: „Wenn man alle Ebenen betrachtet, die durch eine Normale gehn, so findet man: Jede dieser Ebenen enthält unendlich viele Geraden, welche Tangenten an homoaxiale Schraubenlinien von derselben Ganghöhe sind.“[1])

Die Normalebene steht senkrecht auf der Tangente und auf der Schmiegungsebene; sie hat für die Schraubenlinie die Gleichung:

$$y\,x' - x\,y' - a\,r\,(z' - z) = 0.$$

Sie bildet mit der x y-Ebene denselben konstanten Winkel wie die Tangente mit der z-Axe. Ihr Schnitt mit der Schmiegungsebene ist die Hauptnormale, die mit dem Lot auf die Zylinderaxe identisch ist; die in ihr befindliche Gerade, die im Berührungspunkt senkrecht auf der Tangente steht, ist die Binormale. Ihr Winkel mit der z-Axe ergänzt den zwischen der Tangente und dieser Axe zu $\frac{\pi}{2}$.[2])

---

1) Diese beiden Sätze bringt Cesàro: Note de géométrie. Mathésis, recueil mathématique . . . III. 1883.

2) Einen Beweis dieser leichteinzusehenden Tatsache gibt Edwardes: Solution of question 6078. Mathematical questions with their solutions, from the Educational Times. Vol. 36. 1881.

4. Die Krümmung.

a) Krümmung und Torsion der Schraubenlinie.

Die allgemeine Formel für den Krümmungsradius ist:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}.$$

Für die Schraubenlinie ergibt sich daraus nach leichter Rechnung:

$$\varrho = r(1 + a^2).$$

Ähnlich erhält man aus der allgemeinen Formel für den Torsionsradius:

$$\frac{1}{\tau} = -\varrho^2 \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^3x}{ds^3} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^3y}{ds^2} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}$$

den Wert:

$$\tau = -\frac{r(1 + a^2)}{a}.$$

Bei der gemeinen Schraubenlinie sind sowohl Krümmung als auch Torsion konstant.[1])

Bis in die neueste Zeit herein hat man geglaubt, daß die gemeine Schraubenlinie die einzige Kurve mit konstanter

1) Diese Eigenschaft der Schraubenlinie hat schon Cauchy a. a. O. (1826) bemerkt. Er berechnet den Krümmungs- und Torsionsradius. In den andern Arbeiten dieser Zeit, z. B. bei Brandes a. a. O. und bei Grebe a. a. O. (1829) wird nur der Radius der ersten Krümmung in den Bereich der Untersuchung gezogen. Das ist bei Grebe besonders erstaunlich, der eine erschöpfende Arbeit über die Schraubenlinie geben will. Daß die Schraubenlinie konstante Krümmung und Torsion hat, erwähnt Olivier: Mémoire de géométrie. Journal de l'école polytechnique; cahier 24 (1835) als bekannte Tatsache schon wenige Jahre später, also hätte sie doch Grebe auch finden müssen, umsomehr, als, wie gesagt, Cauchy schon 3 Jahre vor ihm beide Radien berechnet hat.

Krümmung und Torsion ist. Aber dies ist nur richtig, wenn man sich auf das Reelle beschränkt; es zeigt sich, daß auf einem Zylinder aus Minimalgraden imaginäre Kurven dritter Ordnung liegen, deren Krümmung und Torsion gleichfalls konstant sind.[1])

Wenn man von dieser Kurve auf einem Zylinder von Minimalgraden absieht, so läßt sich zeigen, daß die Konstanz der Krümmung und der Torsion eine notwendige und hinreichende Bedingung bildet, damit eine Kurve die Helix eines Kreiszylinders ist.

Wir suchen also eine reelle Kurve, bei der Krümmung und Torsion konstant sind.

Nach den Frenet-Serretschen Formeln ist

$$1 = \varrho \frac{d\alpha}{ds}; \text{ andrerseits } 1 = \tau \frac{d\lambda}{ds}$$

also: $$\varrho \frac{d\alpha}{ds} = \tau \frac{d\lambda}{ds}, \quad \varrho \frac{d\beta}{ds} = \tau \frac{d\mu}{ds}, \quad \varrho \frac{d\gamma}{ds} = \tau \frac{d\nu}{ds};$$

da ϱ und τ nach der Voraussetzung konstant sind, liefert die Integration dieser Gleichungen:

$$\varrho\,\alpha - \tau\,\lambda = c_1$$
$$\varrho\,\beta - \tau\,\mu = c_2$$
$$\varrho\,\gamma - \tau\,\nu = c_3$$

Wir setzen:

$$\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + \tau^2}} = \cos i$$

$$\frac{\tau}{\sqrt{\varrho^2 + \tau^2}} = \sin i$$

Um die Konstanten $c_1\ c_2\ c_3$ zu bestimmen, verfügen wir nun über die Lage des Koordinatensystems so, daß für $s = 0$ die Hauptnormale mit der negativen x-Axe zusammenfällt und die Tangente mit der z-Axe den Winkel i bildet.

1) Diese Bemerkung macht Lyon: Courbes à torsion constante. Annales de l'enseignement supérieur de Grenoble. II. 1890. Vgl. Scheffers: Einführung in die Theorie der Kurven. Bd. I.

Dann haben die Richtungskosinus des Dreikants für $s = 0$ die Werte:

$$\begin{array}{lll} l = 1 & m = 0 & n = 0 \\ \alpha = 0 & \beta = \sin i & \gamma = \cos i \\ \lambda = 0 & \mu = -\cos i & \nu = \sin i. \end{array}$$

Wir erhalten:

$$c_1 = 0 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = \sqrt{\varrho^2 + \tau^2}.$$

Also:

(1) $$\varrho\,\alpha - \tau\,\lambda = 0$$

(2) $$\varrho\,\beta - \tau\,\mu = 0$$

(3) $$\varrho\,\gamma - \tau\,\nu = \sqrt{\varrho^2 + \tau^2}.$$

Durch Multiplikation mit α, bezw. β, γ und folgende Addition, ergibt sich:

(a) $$\gamma = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + \tau^2}}.$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) nach Multiplikation mit γ bezw. $-\beta$ finden wir

$$\tau\,(\gamma\,\mu - \beta\,\nu) = -\beta\sqrt{\varrho^2 + \tau^2}$$

(b) $$\varrho\,\tau\,\frac{d\,\alpha}{ds} = -\beta\sqrt{\varrho^2 + \tau^2}$$

$$\varrho \sin i \frac{d\,\alpha}{ds} = -\beta.$$

Die Gleichungen (a) und (b) liefern

$$\varrho^2 \sin^2 i \left(\frac{d\,\alpha}{ds}\right)^2 = \sin^2 i - \alpha^2$$

$$\frac{\varrho \sin i \; d\,\alpha}{\sqrt{\sin^2 i - \alpha^2}} = \pm ds$$

$$\varrho \sin i \cdot \arcsin \frac{\alpha}{\sin i} = \pm s + c.$$

Da für $s = 0$ $\alpha = 0$ ist, so ist also $c = 0$.

Daraus folgt:

$$\alpha = \pm \sin i \cdot \sin \frac{s}{\varrho \sin i}$$

$$\beta = \mp \sin i \cos \frac{s}{\varrho \sin i}$$

$$\gamma = \cos i.$$

Die Integration ergibt

$$x - x_0 = \mp \varrho \sin^2 i \cos \frac{s}{\varrho \sin i}$$

$$y - y_0 = \pm \varrho \sin^2 i \sin \frac{s}{\varrho \sin i}$$

$$z - z_0 = s \cos i.$$

Also die Konstanz von Krümmungs- und Torsionsradius ist notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine reelle Kurve eine gemeine Schraubenlinie sei.[1])

b) Die ganze Krümmung.

Unter der ganzen Krümmung einer Raumkurve versteht man die Größe

$$\frac{1}{R} = \frac{dk}{ds},$$

worin dk den Winkel zweier unendlich naher Hauptnormalen bedeutet. Sie läßt sich berechnen durch die Gleichung:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}.$$

Für die Schraubenlinie hat sie demnach den Wert:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r\sqrt{1+a^2}}.$$

---

1) Einen analytischen Beweis für diese Tatsache bringt zuerst Puiseux: Problème de géométrie. Journal de Math. (Liouville) III (1842) S. 65—70. Geometrisch beweisen Bertrand: Sur la courbe dont les deux courbures sont constantes. Journal de math. XIII 1848 und später Allen: Notes on solid geometry. The Messenger of Mathematics XII (2) 1882 diesen Satz. Die Puiseux'sche Entwicklung hat Liouville in die 5. Aufl. von Monge: Application d'analyse ... 1850 aufgenommen.

c) Die sphärische Torsion.

Die sphärische Torsion einer Kurve ist definiert als der reziproke Wert einer Grösse S, die durch die Gleichung

$$S\,d\omega = ds$$

bestimmt ist; darin bedeutet $d\omega$ den Winkel zweier Radien unendlich naher Schmiegungskugeln, d. h. der Kugeln, die man durch vier benachbarte Punkte der Kurve legen kann. Bei der Schraubenlinie ist der Radius der sphärischen Torsion, die Grösse S, konstant und zwar gleich dem Radius der ersten Krümmung:[1])

$$S = r(1 + a^2).$$

Diese Eigenschaft kommt allen Kurven konstanter Krümmung zu.

d) Ort der Krümmungsmittelpunkte und Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln.

Der Krümmungsradius der Schraubenlinie hatte sich als konstant herausgestellt. Als Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts erhält man bei Anwendung der allgemeinen Formeln

$$\xi - x = \varrho^2 \frac{d^2 x}{ds^2} \quad \eta - y = \varrho^2 \frac{d^2 y}{ds^2} \quad \zeta - z = \varrho^2 \frac{d^2 z}{ds^2}$$

die Werte

$$\xi = -a^2 r \cos t \quad \eta = -a^2 r \sin t \quad \zeta = a r t.$$

Der Ort der Krümmungsmittelpunkte ist also eine andre Schraubenlinie[2]) von derselben Ganghöhe, aber auf einem parallelen Zylinder mit dem Basisradius $r a^2$.[3]) Umgekehrt ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte dieser zweiten Helix die Urkurve.

---

1) Diesen Satz beweist Schell: Über die Schmiegungskugel und die sphärische Torsion der Kurven doppelter Krümmung. Archiv XIX. 1852.

2) Ich fand diese Entwicklung zuerst bei Cauchy a. a. O., (1826) Leçon XVIII e. E. W. Grebe kommt zu demselben Resultat. Vgl. S. 9.

3) Brandes: Lehrbuch der höheren Geometrie II. 1824 bestimmt den geometrischen Ort der Schnittpunkte dreier benachbarter Normalebenen, also den Ort für die Mittelpunkte der Schmiegungskugeln.

Mit der Krümmungsmittelpunktkurve steht in enger Beziehung die Schmiegungskugel. Diese war oben definiert worden als die Kugel, die durch vier benachbarte Punkte einer Kurve doppelter Krümmung bestimmt ist, die also die Kurve in dritter Ordnung berührt. Natürlich ist die Kugel im allgemeinen für jeden Punkt der Kurve verschieden; für die Schraubenlinie ist ihr Radius konstant, und die Mittelpunkte der Schmiegungskugeln liegen auf einer andern Schraubenlinie, und zwar auf der Kurve der Krümmungsmittelpunkte der Helix.[1]) Allerdings findet dies Zusammentreffen der beiden Kurven nicht nur bei der gemeinen Helix, sondern überhaupt bei allen Kurven konstanter Krümmung statt.[2])

Die Steigungswinkel der gegebenen Helix und ihrer Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte ergänzen sich zu $\frac{\pi}{2}$. Beträgt also jeder dieser beiden Winkel 45^0, so sind die beiden Schraubenlinien kongruent; sie liegen auf demselben Zylinder, sind aber im entgegengesetzten Sinne um ihn gewickelt.[3])

---

1) Diese Tatsache hat zuerst Schell in dem eben erwähnten Artikel festgestellt. Allerdings erwähnt Olivier: Mémoire de géométrie. Journal de l'école polytechnique cah. 24. 1835 schon als bekannte Tatsache, daß die Gratlinie der Polarfläche, die mit dem Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln identisch ist, wie weiter unten noch gezeigt werden wird, mit der Krümmungsmittelpunktkurve bei der Schraubenlinie zusammenfällt. An dieser Stelle findet sich bei Olivier übrigens ein bisher nicht bemerktes Versehen. Er behauptet, daß bei den allgemeinen zylindrischen Schraubenlinien die Gratlinie der Polarfläche mit der Krümmungsmittelpunktkurve zusammenfällt; es trifft aber nur für die Kurven konstanter Krümmung zu, also unter den Schraubenlinien nur für die gemeine.

2) Vergl. J. A. Serret: Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. Journal de mathématiques XVI. 1851. S. 204.

3) Beide Sätze begegnen uns zuerst bei Steiner: Über einige allgemeine Eigenschaften der Kurven doppelter Krümmung. Berichte über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Berliner Akademie. 1839. Werke II.

Die Radien der ersten Krümmung der beiden Schraubenlinien sind, wie oben bemerkt, gleich. Dieser gemeinsame Krümmungsradius ist die mittlere Proportionale zwischen den Torsionsradien der beiden Schraubenlinien.[1])

5. Die Schraubenlinien als W-Kurven.[2])

Klein und Lie definieren die W-Kurven als die Kurven, die sich in sich selbst transformieren durch unendlich viele lineare Transformationen; diese erlauben im allgemeinen, jeden Punkt der Kurve in jeden andern überzuführen.

Unter diesen linearen Transformationen muß notwendig eine infinitesimale sein. Eine infinitesimale projektive Transformation erzeugt, unendlich oft ausgeführt, eine eingliedrige projektive Gruppe G_1. Übt man alle Transformationen auf irgend einen Punkt aus, so beschreibt er eine Bahnkurve der Gruppe G_1. Diese Bahnkurven sind die W-Kurven.

Ist die infinitesimale Transformation der Gruppe G_1 eine unendlich kleine Schraubung, so sind die dazu gehörigen W-Kurven gemeine Schraubenlinien, die durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ y &= x_0 \sin t + y_0 \cos t \\ z &= q\, t, \end{aligned}$$

wenn die z-Axe als Schraubungsaxe genommen wird. Alle ∞^2-Kurven haben die z-Axe zur Axe und den gleichen Gang $2\pi q$.

---

1) Diese Entdeckung machte Lamarle: Les applications du calcul différentiel à l'analyse et à la géométrie. Mémoires couronnés de l'académie de Bruxelles. XV. 1863.

2) Ich benutzte für diesen Abschnitt die Ausführungen von Klein und Lie: Sur une certaine famille de courbes et de surfaces. Comptes Rendus hebd. 70. (1870). S. 1222ff. u. 1275ff. und Scheffers: Besondere transzendente Kurven. Enzyklopädie der math. Wissenschaften III. D. 4 Nr. 13 und 20.

6. Die Polarfläche, die Evoluten und die Evolventen.

Die Polarfläche einer Raumkurve, auch Evolutfläche, oder Einhüllende der Normalebenen[1]) genannt, ist der Ort der Durchschnittlinien zweier benachbarter Normalebenen.[2]) Ihre Gratlinie ist der Ort der Zentren der Schmiegungskugeln.

Bei der Schraubenlinie ist die Polarfläche eine Böschungsfläche; das heißt eine Fläche, deren Tangentialebenen einen konstanten Winkel mit der Horizontalebene bilden. Ihre Erzeugenden sind die Tangenten an die Schraubenlinie, die gleichzeitig der Ort der Schmiegungskugelmittelpunkte und die Krümmungsmittelpunktkurve ist.[3])

Die Fläche führt den Namen Evolutfläche, weil auf ihr alle Filarevoluten der Schraubenlinie liegen. Die Krümmungsmittelpunktkurve ist aber nicht, wie bei den ebenen Kurven, eine Evolute der Kurve.[4])

Für die Evoluten der gemeinen Schraubenlinie erhält man bei Anwendung der allgemeinen Formeln die Gleichungen:

$$\xi = -a^2 r \cos t - a r \sqrt{1+a^2} \sin t \operatorname{tg} \frac{a[t-C]}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\eta = -a^2 r \sin t + a r \sqrt{1+a^2} \cos t \cdot \operatorname{tg} \frac{a(t-C)}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\zeta = -a r t - r \sqrt{1+a^2} \operatorname{tg} \frac{a(t-C)}{\sqrt{1+a^2}}.$$[5])

---

1) Unter diesem Namen erwähnt Olivier a. a. O. (1835) mehrmals die Fläche. Vgl. S. 20.

2) Diese Definition gibt zuerst Brandes a. a. O. (1824).

3) Vgl. S. 20. Den Satz, daß bei allen Kurven konstanter Krümmung die Gratlinie der Polarfläche und der Ort der Krümmungsmittelpunkte zusammenfallen, leitet Serret a. a. O. her.

4) Vgl. Jacobi: Zur Theorie der Kurven. (1835). Werke Bd. 7, S. 13. Crelles Journal 14, S. 56–63.

5) Diese Gleichungen der Evoluten der Schraubenlinie hat schon Cauchy a. a. O. (1826) aufgestellt. Auch die Gleichung der Evolutfläche selbst entwickelt Cauchy, die er in der Form gibt:

Jede Evolute besteht aus unendlich vielen Zweigen, deren jeder wieder in zwei Teile zerfällt; jeder dieser beiden liegt auf einer Schale der Fläche. Die Erzeugenden der Fläche, also die Tangenten der Gratlinie, sind Asymptoten der Evoluten.[1]) Die Kurven selbst bilden die geodätischen Linien der Fläche.[2])

Um die Evolventen der Schraubenlinie zu erhalten, setze man wieder in die allgemeinen Gleichungen, die für die Evolventen einer Raumkurve die Form haben

$$x_1 = x - (s + c)\cos\alpha, \quad y_1 = y - (s + c)\cos\beta,$$
$$z_1 = z - (s + c)\cos\gamma$$

die Werte für die Schraubenlinie ein. Für z_1 ergibt sich ein konstanter Wert; die Evolventen sind also ebene Kurven, und zwar Evolventen der Kreisbasis des Zylinders. Sie liegen in der zur x y-Ebene parallelen Ebene

$$z_1 = \frac{c\,a}{\sqrt{1 + a^2}}$$

und haben die Gleichungen

$$x_1 = r\cos t - r\,t\sin t - \frac{c\sin t}{\sqrt{1 + a^2}}$$

$$y_1 = r\sin t - r\,t\cos t - \frac{c\cos t}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Da die Gratlinie der Polarfläche wieder eine Schraubenlinie ist, liegt es nahe, die Polarfläche dieser Schraubenlinie

---

$$\left(\xi\cos\frac{\zeta}{a\,R} + \eta\sin\frac{\zeta}{a\,R}\right)\cos\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^4\,R^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + a^2\,R$$
$$= \pm\left(\eta\cos\frac{\zeta}{a\,R} - \xi\sin\frac{\zeta}{a\,R}\right)\sin\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^4\,R^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

1) Auch diesen Satz leitet schon Cauchy (1826) her.

2) Zum ersten Mal erwähnt diese Tatsache Molins: Sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface développable sur laquelle elles sont tracées. Journal des mathématiques XII. (1847).

zu untersuchen. Man erhält dafür die Tangentenfläche der ursprünglichen Helix [1]) und als deren Gratlinie die gegebene Kurve. Dies Resultat ist selbstverständlich nach der oben [2]) erwähnten Eigenschaft, daß die Schraubenlinie mit der Krümmungsmittelpunktskurve zusammenfällt, die zu dem Ort ihrer Krümmungszentren konstruiert wird. Die Fläche der Tangenten soll noch näher untersucht werden.

7. Die Böschungsfläche.

Die Tangentenfläche einer Schraubenlinie ist eine Böschungsfläche, weil ihre Tangentialebenen mit der Horizontalebene einen konstanten Winkel bilden, denselben, unter dem die Tangenten der Helix die Horizontalebene schneiden. Sie ist die einzige abwickelbare Schraubenfläche.

Die Gleichung der Böschungsfläche läßt sich aus den Gleichungen der Tangente, aus denen man den variablen Parameter t eliminieren muß, gewinnen. Sie hat die Form:

$$x \sin\left\{\frac{z}{a\,r} - \sqrt{\frac{x^2+y^2-r^2}{r^2}}\right\} + y \cos\left\{\frac{z}{a\,r} - \sqrt{\frac{x^2+y^2-r^2}{r^2}}\right\} = r.$$

Sie schneidet die Horizontalebene in der Evolvente der Zylinderbasis.

Ein zu dem der Gratlinie konzentrischer Zylinder, dessen Radius größer ist, als der der Schraubenlinie, schneidet die Böschungsfläche in zwei Schraubenlinien derselben Ganghöhe;

---

1) Dieses Resultat fand ich bei Voizot: Journal des mathématiques XVII. 1852.

2) Vgl. S. 19.

3) Die Böschungsfläche wurde zum ersten Mal analytisch dargestellt von Leroy: Géométrie analytique dans l'espace 1829. Deutsch von Kauffmann, Stuttgart 1840. Daß die Schnittpunkte aller Tangenten mit der Basisebene in der Evolvente des Kreises liegen, hat schon Horn a. a. O. (1827) konstatiert.

die eine liegt auf dem unteren, die andre auf dem oberen Mantel der Fläche. Also erzeugt jeder Punkt der Tangente eine Schraubenlinie derselben Ganghöhe wie die gegebene. Da alle Kontingenzwinkel der Schraubenlinie gleich sind, gehen alle Schraubenlinien bei der Abwicklung der Böschungsfläche in konzentrische Kreise über.[1])

Die Gratlinie der Böschungsfläche hat den konstanten Krümmungsradius $\varrho = r\ (1 + a^2)$; bei der Abwicklung wird die Krümmung nicht verändert; die Schraubenlinie wird also zu einem Kreise mit dem Radius $r\ (1 + a^2)$.[2]) Alle andern Kreise, in die die koaxialen Schraubenlinien der Fläche transformiert werden, haben einen größeren Radius.

Zur flächentheoretischen Untersuchung der Böschungsfläche legt man am besten eine andre Form der Gleichungen zu Grunde. Wenn man den Abstand eines Flächenpunktes $(x_1\ y_1\ z_1)$ von dem betreffenden Berührungspunkt der Erzeugenden auf dieser gemessen v nennt, so hat man die Gleichung

$$v^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2.$$

In Verbindung mit den Tangentengleichungen ergibt sich dann folgende Darstellung der Böschungsfläche:

$$x_1 = r \cos t - \frac{v}{\sqrt{1 + a^2}} \sin t$$

---

1) Diese Resultate begegnen uns zuerst bei Leroy: Géométrie descriptive. Deutsch von Kauffmann 1838. Ähnlich gibt sie auch Olivier: Cours de géométrie descriptive II (1844) S. 206 ff.

2) Die Aufgabe, die Böschungsfläche abzuwickeln, lösen Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Bd. II (1887) S. 377; ferner Rohn und Papperitz: Lehrbuch der darstellenden Geometrie Bd. I, 1. Aufl. 1893, S. 416 ff. und Hoppe: Die abwickelbare Schraubenfläche. Archiv (2) 14 (1895). In dieser Arbeit macht Hoppe die Fläche zum Gegenstand einer flächentheoretischen Untersuchung: er bestimmt die Fundamentalgrößen, berechnet das Krümmungsmaß $\frac{+1}{\varrho_1\ \varrho_2}$, das für die Böschungsfläche null wird, und die Summe der Hauptkrümmungen.

$$y_1 = r \sin t + \frac{v}{\sqrt{1+a^2}} \cos t$$

$$z_1 = a\, r\, t + \frac{a\, v}{\sqrt{1+a^2}}.$$

[Durch Elimination von v und t würde wieder die Gleichung auf S. 24 resultieren].

Für die Gauß'schen Fundamentalgrößen erhält man:

$$E = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial v}\right)^2 = \frac{1+a^2}{1+a^2} = 1.$$

$$F = \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial y_1}{\partial v}\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial z_1}{\partial v}\frac{\partial z_1}{\partial t} = \frac{r}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{a^2 r}{\sqrt{1+a^2}} = r\sqrt{1+a^2}$$

$$G = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial t}\right)^2 = r^2 + \frac{v^2}{1+a^2} + a^2 r^2$$

Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N lassen sich aus den Gleichungen berechnen:

$$L = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z_1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial y_1}{\partial t} & \frac{\partial z_1}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$M = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial v \partial t} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial v \partial t} & \frac{\partial^2 z_1}{\partial v \partial t} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial y_1}{\partial t} & \frac{\partial z_1}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$N = \frac{1}{E\,G - F^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial y_1}{\partial t} & \frac{\partial z_1}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Für die Böschungsfläche erhalten wir

$$L = 0$$

$$M = 0$$

$$N = \frac{a\,v^2}{(E\,G - F^2)\,(1 + a^2)^2}.$$

Also ergibt sich für das Gaußsche Krümmungsmaß

$$\frac{1}{\varrho_1\,\varrho_2} = \frac{L\,N - M^2}{E\,G - F^2} = 0.$$

Für die Summe der Hauptkrümmungen hat man die allgemeine Formel

$$H = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{G\,L - 2\,F\,M + E\,N}{E\,G - F^2}.$$

Mit den Werten der Böschungsfläche ergibt sich

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{a}{v^2}.$$

Die beiden Scharen von Krümmungslinien bestehen aus ebenen Kurven[1]) und zwar aus den erzeugenden Tangenten und aus den Kreisevolventen, die kongruent sind zu den

1) Daß die Krümmungslinien der abwickelbaren Schraubenfläche eben sind, hat P. Serret: Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure. Paris 1860 erkannt. Er gibt S. 139 den Satz: „Die Krümmungslinien eines abwickelbaren Helikoids sind eben und jede developpable Fläche, deren Krümmungslinien eben sind, ist ein Helikoid."

Kurven, in denen die x y-Ebene und jede ihr parallele Ebene die Böschungsfläche schneiden.[1])

Die geodätischen Linien der Böschungsfläche[2]) sind identisch mit den Filarevolventen der Krümmungsmittelpunktskurve; sie setzen sich aus unendlich vielen Zweigen zusammen, von denen jeder aus zwei Teilen besteht, die entsprechend auf den beiden Schalen des Helikoids liegen. Die geradlinigen Erzeugenden der Fläche sind Asymptoten der Geodätischen; zwei aufeinanderfolgende Zweige haben eine gemeinsame Asymptote. Die verschiedenen Zweige schneiden die Gratlinie in alternierend gleichen Teilen.

Für den Flächeninhalt eines Mantels der Böschungsfläche, der einem Gange der Schraubenlinie entspricht, also von zwei geraden Zylinderschnitten begrenzt ist, die um eine Ganghöhe von einander entfernt sind, erhält man den Wert:

$$\Theta = \frac{4}{3} r^2 \pi^3 \sqrt{1 + a^2}.^3)$$

Interessant sind die Beziehungen zwischen der Gratlinie und den Schraubenlinien, die als Schnitt der Böschungsfläche mit den zu dem Zylinder der Gratlinie konzentrischen Zylindern entstehen. Die Tangenten an alle Schraubenlinien der Böschungsfläche in den Punkten einer Erzeugenden umhüllen eine Parabel, die in der Schmiegungsebene der Gratlinie liegt und den Krümmungsmittelpunkt der Gratlinie zum Brennpunkt hat. Rollt diese Schmiegungsebene auf der Fläche ab, so umhüllen die Parabeltangenten die Schraubenlinien. Ferner: „Die Krümmungsmittelpunkte der Helixe H^1 in den Punkten derselben Erzeugenden der Böschungsfläche

---

1) Einen Teil dieser flächentheoretischen Untersuchungen macht Hoppe a. a. O. Vgl. Anm. 2. S. 25.

2) Über die geodätischen Linien berichtet Molins: Sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface développable sur laquelle elles sont tracées. Journal des mathématiques XII. 1847.

3) Die Quadratur der Böschungsfläche wurde ausgeführt von Pressel: Quadratur der entwickelbaren Schraubenfläche. Archiv 4 (1844).

liegen auf einer kubischen Raumkurve, dem Schnitt eines geraden Zylinders durch die z-Axe mit einem gleichseitigen Hyperboloid, dessen Direktrizen die Tangente und die Axe sind und das als Leitebene die x y-Ebene hat.“[1])

II. Kapitel.

Die allgemeine Schraubenlinie.

1. Definition und analytische Darstellung.

Die allgemeine Schraubenlinie, die Kurve konstanter Steigung auf einem Zylinder mit beliebiger Basis,[2]) entsteht, wie die gewöhnliche Helix, aus der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn es so um den Zylinder gewickelt wird, daß eine Kathete der Basiskurve des Zylinders folgt.[3]) Daraus ergibt sich, daß die charakteristischen Eigenschaften, die sich aus der analogen Entstehungsweise für die gemeine Schraubenlinie ergaben, auch der allgemeinen Kurve zukommen: sie schneidet die Mantellinien des Zylinders unter konstantem Winkel; für jeden Punkt der Schraubenlinie ist ferner das Verhältnis zwischen der Länge, die die Kurve auf der Mantellinie des Zylinders abschneidet, und der entsprechenden krummlinigen Abzisse, dem Basisbogen, kon-

---

1) Beide Sätze verdanken wir Gérard: Sur l'hélicoide développable. Mathésis, Recueil mathématique (3) 5. 1905. Der erste Satz gilt aber nicht für die gemeine Schraubenlinie allein; er wurde schon früher allgemein für Kurven konstanter Krümmung nachgewiesen. Vgl. Cesàro: Nat. Geometrie. S. 191.

2) Die allgemeine Schraubenlinie ist zum ersten Mal untersucht worden von Lancret: Mémoires sur les courbes à double courbure. Mémoires des savants étrangers I. 1805. prés. en 1802.

3) Diese Definition begegnet uns bei Leroy: Géométrie descriptive. Deutsch von Kauffmann. Stuttgart 1838.

stant. Endlich ist die Helix geodätische Linie auch auf dem allgemeinen Zylinder.[1])

Die allgemeine Schraubenlinie kann analytisch dargestellt werden durch die Gleichungen

$$x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma), \quad z = \operatorname{tg} \Theta \cdot \sigma,$$

wobei $x = x(\sigma)$, $y = y(\sigma)$ die Gleichungen der Grundkurve mittels ihrer Bogenlänge bedeuten.[2])

Die Monge'sche Gleichung der allgemeinen Schraubenlinie hat die Form:

$$dz = k \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

worin $k = \operatorname{tg} \Theta$ die Tangente des konstanten Winkels bedeutet, den das Bogenelement mit der Grundrißebene bildet.[3])

2. Krümmung und Torsion der allgemeinen Schraubenlinie.

Die allgemeine Schraubenlinie war oben definiert worden als die Kurve, deren Tangenten die Mantellinien des Zylinders, der sie auf die Horizontalebene projiziert, unter konstantem Winkel schneidet; mit andern Worten: die Tangenten bilden mit einer festen Richtung einen konstanten Winkel. Wenn mit a b c die Richtungskosinus dieser festen Richtung, mit $\alpha\ \beta\ \gamma$, l m n, $\lambda\ \mu\ \nu$ die der Tangente, Hauptnormale und Binormale bezeichnet werden, so ergibt sich aus der Definition die Gleichung:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \text{konst.}$$

---

1) Auch diese Eigenschaften leitet Leroy a. a. O. her.

2) Vgl. Enzyklopädie der math. Wissenschaften: III. D. 4. Scheffers: Besondere transzendente Kurven.

3) Diese Gleichung begegnet uns schon bei Schlömilch: Über Linien von konstanter Steigung auf gegebenen Flächen. Zeitschrift für Mathematik und Physik I. 1856. Die Lösung der Gleichung für besondere Fälle hat Enneper: Zur Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Math. Annalen 19. (1882) S. 72 ff. zum Teil schon in den Göttinger Nachrichten. 1866. S. 134—140.

Durch Differentiation folgt daraus, da $\alpha = x'$ $\beta = y'$ $\gamma = z'$, also $\alpha' = x'' = \frac{l}{\varrho}$, $\beta = y'' = \frac{m}{\varrho}$, $\gamma = z'' = \frac{n}{\varrho}$ und $\frac{1}{\varrho} \neq 0$

$$a\,l + b\,m + c\,n = 0.$$

Die Differentiation dieser Gleichung wiederum liefert

$$a\,l' + b\,m' + c\,n' = 0$$

oder, da

$$l' = -\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\lambda}{\tau}$$

$$m' = -\frac{\beta}{\varrho} - \frac{\mu}{\tau}$$

$$n' = -\frac{\gamma}{\varrho} - \frac{\nu}{\tau},$$

$$(a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma)\,\tau + \varrho\,(a\,\lambda + b\,\mu + c\,\nu) = 0$$

also

$$\frac{\tau}{\varrho} = -\frac{a\,\lambda + b\,\mu + c\,\nu}{a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma}.$$

Die Ableitung des Zählers

$$\frac{d}{ds}(a\,\lambda + b\,\mu + c\,\nu)$$

ergibt, da $\lambda' = \frac{l}{\varrho}$, $\mu' = \frac{m}{\varrho}$, $\nu' = \frac{n}{\varrho}$, $\frac{d}{ds}(a\,\lambda + b\,\mu + c\,\nu) = \frac{1}{\varrho}(a\,l + b\,m + c\,n) = 0$.

Mithin ist der Zähler selbst konstant. Die Konstanz des Nenners $a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma$ war aus der Definition erkannt worden; es folgt also, daß bei der allgemeinen Schraubenlinie das Verhältnis von Krümmung und Torsion konstant ist.[1])

Hierbei ist zu bemerken, daß noch bei einer andern Kurve das Verhältnis von Krümmung und Torsion konstant ist, nämlich bei der imaginären Kurve:

1) Diesen Satz fand Lancret a. a. O. 1802.

$$x = \frac{1}{2}\int\left[\left(\int\frac{ds}{\varrho}\right)^2 - 2\right]ds$$

$$y = -\frac{i}{2}\int\left(\int\frac{ds}{\varrho}\right)^2 ds$$

$$z = -\int\int\frac{ds}{\varrho}\,ds$$

Bei ihr ist das Verhältnis von Krümmung und Torsion $= i$. Entsprechend gestalten sich die Gleichungen für die imaginären Kurven, bei denen das Verhältnis von Krümmung und Torsion $= -i$ ist.

Es läßt sich nun aber zeigen, daß diese imaginären Kurven geodätische Linien auf Zylindern von Minimalgraden sind.[1]) Sie können also als Schraubenlinien im allgemeineren Sinne aufgefaßt werden, und man kann sagen: bei allen Schraubenlinien ist das Verhältnis von Krümmung und Torsion konstant.[2])

Das konstante Verhältnis von Krümmung und Torsion ist notwendig und hinreichend, damit eine Kurve eine allgemeine Schraubenlinie ist.

Um dies zu beweisen, setze man

$$\frac{\varrho}{\tau} = k.$$

Wenn man wieder mit $\alpha\,\beta\,\gamma$, $l\,m\,n$, $\lambda\,\mu\,\nu$ die Richtungskosinus der Tangente, Hauptnormale und Binormale bezeichnet, so hat man allgemein

$$\tau\,\lambda' - \varrho\,\alpha' = 0$$
$$\tau\,\mu' - \varrho\,\beta' = 0$$
$$\tau\,\nu' - \varrho\,\gamma' = 0,$$

wobei die Akzente die Ableitungen nach der Bogenlänge bedeuten.

---

1) Vgl. G. Scheffers: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. I. Teil. 2. Auflage 1910. S. 426 ff.

2) Diesen Satz fand Lancret a. a. O. 1802.

Wir setzen nun voraus, daß $\frac{\varrho}{\tau}$ konstant $= k$ sein soll. Die drei Gleichungen haben dann die Form

$$\begin{aligned} d\lambda - k\,d\alpha &= 0 \\ d\mu - k\,d\beta &= 0 \\ d\nu - k\,d\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Durch Integration erhält man

$$\begin{aligned} \lambda - k\alpha &= \text{konst.} \\ \mu - k\beta &= \text{konst.} \\ \nu - k\gamma &= \text{konst.} \end{aligned}$$

oder, wenn α_1, β_1, γ_1 die Kosinus der Winkel sind, die die Axen mit einer willkürlichen Geraden bilden,

$$\begin{aligned} \lambda - k\alpha &= \sqrt{1+k^2}\,\alpha_1 \\ \mu - k\beta &= \sqrt{1+k^2}\,\beta_1 \\ \nu - k\gamma &= \sqrt{1+k^2}\,\gamma_1. \end{aligned}$$

Wird die Gerade parallel zur z-Axe gewählt, ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \lambda &= k\alpha \\ \mu &= k\beta \\ \nu &= k\gamma + \sqrt{1+k^2}. \end{aligned}$$

Die Quadrierung und Addition dieser Gleichungen liefert

$$\gamma = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$$

und

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Die Gleichung $\gamma = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$ zeigt, daß die Tangente an die gesuchte Kurve einen konstanten Winkel mit der z-Axe

bildet; die Kurve ist also eine Schraubenlinie auf einem Zylinder mit beliebiger Basis.[1])

---

1) Ich bin in diesem Beweise dem Wege gefolgt, den J. A. Serret in seinem Aufsatze gibt: Sur quelques formules, relatives à la théorie des courbes à double courbure. Journal de mathématiques T. XVI. 1851, S. 193 ff. Entdeckt und bewiesen hat diesen Satz De St. Venant: Mémoires sur les lignes courbes non planes. Journal de l'école polytechn.; 30 cah. 1845. S. 26, prés. en 1844. Er wird aber fälschlich Bertrand zugeschrieben, der ihn in der Abhandlung: Sur les courbes dont les deux courbures sont constantes. Journal de math. T. 13. 1848. S. 423 geometrisch bewies. Einen analytischen Beweis gibt Puiseux: Sur la ligne dont les deux courbures ont entre elles un rapport constant. Journal de math. 16. 1851. S. 208 ff. Den Beweis von Serret hat Liouville in die fünfte Auflage von Monge: Application de l'analyse à la géométrie. 5e éd. par Liouville 1850 aufgenommen. De Saint-Venant kam auf einem ganz andern Wege zu dem Ergebnis. Er bestimmt den Winkel zweier aufeinander folgenden rektifizierenden Geraden, als dessen Wert er allgemein erhält

$$\frac{\varrho^2 \, \mathrm{d} \, \frac{\tau}{\varrho}}{\varrho^2 + \tau^2} = \mathrm{d\,H},$$

wobei H der Winkel der rektifizierenden Geraden mit der Kurventangente ist. Der gesuchte Winkel ist null, wenn $\frac{\tau}{\varrho}$ konstant ist. Dann ist H konstant. „Die verschiedenen rektifizierenden Geraden sind die Mantellinien eines Zylinders, und die Kurve ist eine Schraubenlinie mit beliebiger Basis oder eine Kurve, deren Tangenten alle mit einer bestimmten Ebene einen konstanten Winkel bilden.“ Neuen Beweisen des De Saint-Venantschen Satzes begegnen wir später bei Greer: Concerning Curves of Double Curvature. Quarterly Journal of Math. IV. 1861. Adolf Steen: Vindskaeve Kurvers Bestemmelse ved en relation imellen Krumningsradius og Torsionsradius. Zeuthen: Vindskaeve Kurvers ved konstant Forhold mellem Krumningsradius og Torsionsradius. Beide Arbeiten sind in Tidskrift for Mathematik, Tredie Raekke, Femte Aargang, Kjobenhavn 1875, veöffentlicht. Allen: Notes on solid geometry. The Messenger of Mathematics (2) XII. 1882. Egan: Notes sur les courbes gauches. Nouvelles annales de math. (4) VIII. 1908.

3. Andere charakteristische Eigenschaften.

Oben[1]) hatte sich für die Schraubenlinie ergeben

$$a\,l + b\,m + c\,n = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Hauptnormalen senkrecht zu einer Geraden sind, die die Richtungskosinus a, b, c hat, daß sie also alle einer Ebene parallel sind, die auf dieser festen Richtung senkrecht steht.

Es läßt sich nun zeigen, daß umgekehrt jede Kurve, deren Hauptnormalen einer Ebene parallel sind, zu den allgemeinen Schraubenlinien gehört. Aus der Gleichung

$$a\,l + b\,m + c\,n = 0,$$

die angibt, daß alle Hauptnormalen einer Ebene parallel sind, folgt, da $l = r\,x''$, $m = r\,y''$, $n = r\,z''$, nach Division durch r

$$a\,x'' + b\,y'' + c\,z'' = 0;$$

die Integration liefert

$$a\,x' + b\,y' + c\,z' = \text{konst.}$$

oder

$$a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma = \text{konst.}$$

d. h. die Tangenten bilden mit der festen Richtung einen konstanten Winkel, die Kurve ist also eine allgemeine Schraubenlinie. Diese kann demnach auch definiert werden als die Kurve, deren Hauptnormalen einer festen Ebene parallel sind.[2])

4. Der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln.

Die Koordinaten des Mittelpunktes der Schmiegungskugel einer Kurve in einem Punkt haben im allgemeinen die Gleichungen:

---

1) Vgl. S. 31.

2) Der Satz stammt von Bertrand: Mémoire sur les courbes à double courbure. Journal de Math. T. XV. 1850. S. 343.

$$x_1 = x + \varrho\, l - \tau\, \varrho'\, \lambda$$
$$y_1 = y + \varrho\, m - \tau\, \varrho'\, \mu$$
$$z_1 = z + \varrho\, n - \tau\, \varrho'\, \nu$$

oder

$$x_1 = x + \varrho^2\, x'' - \tau\, \varrho\, \varrho'\ (y'\, z'' - z'\, y'')$$
$$y_1 = y + \varrho^2\, y'' - \tau\, \varrho\, \varrho'\ (z'\, x'' - x'\, z'')$$
$$z_1 = z + \varrho^2\, z'' - \tau\, \varrho\, \varrho'\ (x'\, y'' - y'\, x'').$$

Für die Schraubenlinie erhalten wir die Gleichungen

$$x_1 = x\,(s) + \varrho^2\, x''\,(s) + \tau\, \varrho\, \varrho'\, \mathrm{tg}\, \Theta\, y''\,(s)$$
$$y_1 = y\,(s) + \varrho^2\, y''\,(s) - \tau\, \varrho\, \varrho'\, \mathrm{tg}\, \Theta\, x''\,(s)$$
$$z_1 = \mathrm{tg}\, \Theta\, s - \tau\, \varrho\, \varrho'\, [x'\,(s)\, y''\,(s) - y'\,(s)\, x''\,(s)].$$

Die Mittelpunkte der Schmiegungskugeln einer Schraubenlinie liegen auf einer andern Schraubenlinie; einfacher als durch obige Gleichungen läßt sich dieser Satz auf folgende Weise zeigen.

Wenn die Richtungskosinus der Tangente, Hauptnormale und Binormale einer beliebigen Kurve in einem Punkte mit α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν bezeichnet werden, so haben allgemein die Haupttriederkanten der Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte in dem entsprechenden Punkte die Richtungskosinus λ, μ, ν; l, m, n; α, β, γ; wir bezeichnen mit ϱ und τ Krümmungs- und Torsionsradius der ursprünglichen Kurve, mit ϱ_1 und τ_1 die des Orts der Schmiegungskugelzentren. Dann liefern die Frenetschen Formeln

$$\frac{d\,\alpha}{ds} = \frac{l}{\varrho} \qquad \frac{d\,\alpha}{ds_1} = \frac{l}{\tau_1}$$

$$\frac{d\,\lambda}{ds} = \frac{l}{\tau} \qquad \frac{d\,\lambda}{ds_1} = \frac{l}{\varrho_1},$$

daraus

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\varrho_1}{\tau} = \frac{\tau_1}{\varrho}$$

also

$$\frac{\varrho}{\tau} = \frac{\varrho_1}{\tau_1}$$

Ist also die gegebene Kurve eine Schraubenlinie, so ist auch der Ort der Zentren der Schmiegungskugeln eine Schraubenlinie.

5. Die allgemeine Böschungsfläche.

Die Böschungsfläche war oben definiert worden als die Fläche, deren Tangentialebenen einen konstanten Winkel mit einer festen Ebene bilden. Also ist auch die Tangentialfläche der allgemeinen Schraubenlinie eine Böschungsfläche.

Jede zur Horizontalebene parallele Ebene schneidet die Böschungsfläche in der Evolvente der Zylinderbasis der Helix; die Schraubenlinie selbst ist die Gratlinie der Fläche.

Wie oben schon erwähnt wurde, ist die Böschungsfläche abwickelbar; sie hat einen Rotationskegel zum Richtkegel. Ihre Erzeugenden und deren Horizontalprojektionen sind Normalen jeder Horizontalspur der Fläche; sie werden von der Evolute eingehüllt.[1])

Es läßt sich zeigen, daß nicht nur die Tangente selbst, sondern eine unendliche Schar von Geraden, die mit dem Dreikant aus Tangente, Hauptnormale und Binormale fest verbunden sind, bei der Bewegung des Dreikants längs der Helix Böschungsflächen erzeugen.

Wenn nämlich eine Gerade, die unveränderlich mit dem Dreikant einer Kurve verbunden ist, bei der Bewegung längs der Kurve eine Abwickelbare erzeugen soll, so muß die Bedingung erfüllt sein

$$(b^2 + c^2)\ \varrho + a\,c\,\tau = 0,$$

wobei a b c die Richtungskosinus der Geraden, ϱ und τ Krümmungs- bezw. Torsionsradius bedeuten. Für die Schraubenlinie ist $\frac{\tau}{\varrho}$ konstant $= k$, die Bedingungsgleichung geht also über in

$$(b^2 + c^2) + a\,c\,k = 0.$$

1) Diese Resultate sind Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie II, Leipzig 1887, S. 387 entnommen. Die Böschungsfläche heißt dort: Fläche von gleichförmiger Neigung.

Es gibt also unendlich viele Geraden, die eine Böschungsfläche bei der Bewegung des Dreikants erzeugen. Sie alle bilden einen Kegel zweiter Ordnung, der die Tangente selbst auch enthält. Jede beliebige Mantellinie des Kegels beschreibt bei der Bewegung des Dreikants längs der Kurve eine Böschungsfläche.[1])

Mehr läßt sich über die Schraubenlinien im allgemeinen nicht sagen. Um speziellere Eigenschaften feststellen zu können, muß man den Normalschnitt des Zylinders kennen, der die betrachtete Helix in die Horizontalebene projiziert. Oder, da jede Raumkurve als Schnitt zweier Flächen aufgefaßt werden kann, die Schraubenlinie also außer auf dem Zylinder, der sie projiziert, auf einer andern Fläche liegt und auf ihr konstant steigt, genügt es, jedesmal außer der allgemeinen Gleichung der Helix diese andere Fläche zu kennen.

Von den wichtigsten speziellen Schraubenlinien soll das nächste Kapitel handeln.[2])

III. Kapitel.

Spezielle Probleme.

1. Die Schraubenlinien auf Kegeln.

a) Definition und analytische Darstellung.

Bei den Schraubenlinien auf Kegeln unterscheidet man zwei ganz verschiedene Arten von Schraubenlinien, einerseits

---

1) Diese Entwicklung gibt P. Appell: Sur une propriété caractéristique des hélices, Archiv 64. 1879. Zu demselben Ergebnis kommt Bioche: Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe et coupent sous un angle constant la développable des tangentes. Bulletin de la société mathématique de France. 19. 1891.

2) Verschiedene der Schraubenlinien, von denen im nächsten Kapitel die Rede sein wird, stellt Naito: Curves of constant inclination. Tôkyô

die konische Spirale oder konische Schraubenlinie, andererseits die zylindro-konische Schraubenlinie.

Die konische Spirale ist die Kurve konstanter Steigung auf einem Rotationskegel. Sie läßt sich entstanden denken durch den Schnitt eines Rotationskegels mit einer windschiefen Schraubenfläche. Ihre Projektion auf die Horizontalebene ist eine archimedische Spirale, sie kann also auch angesehen werden als der Schnitt eines Rotationskegels mit einem Zylinder, der zur Basis eine archimedische Spirale hat.[1])

Ihre Gleichungen sind

$$x = (a - z)\ \operatorname{tg}\alpha \cos \frac{2\pi z}{h \cos \alpha}$$

$$y = (a - z)\ \operatorname{tg}\alpha \sin \frac{2\pi z}{h \cos \alpha}.$$[2])

Sûgaku-Buturiggak-kwai Kizi. Dai 2 Ki, Maki no IV. 1907—1908, in expliziter Form, allerdings meist sehr unübersichtlich, dar.

1) Die konische Spirale ist eine der Raumkurven, die schon den Alten bekannt war. Pappus [Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Frederico Commandino in latinum conversae, et commentariis illustratae. Pisani 1588 und Boniae 1660] läßt sie in Satz 29 auf die oben angedeutete Weise entstehen. Nach Chasles a. a. O. spricht auch Proklus in seinem Kommentar zum ersten Buche des Euklid, 4. Definition, von ihr. In neuerer Zeit hat sich zuerst mit dieser Kurve beschäftigt:

Bl. Pascal: Dimension d'un solide formé par le moyen d'une spirale autour d'un cône. Oeuvres complètes. Edition Hachette. III. S. 448. Er läßt die Kurve entstehen wie folgt: Auf der Ebene eines Kreises sei in dessen Mittelpunkt eine Senkrechte errichtet. Ein Radius des Kreises bewege sich gleichmäßig um den Mittelpunkt, während er sich gleichzeitig, immer parallel zur Ebene bleibend, an dem Lote emporhebt. Zur selben Zeit bewege sich der Endpunkt des Radius nach der Mitte hin. Die Kurve, die er bei der dreifachen Bewegung beschreibt, ist eine Art Spirale im Raum. Die Gleichungen der konischen Spirale leitet zuerst her Dienger: Bestimmung der Länge der auf einen Kegel gewickelten Schraubenlinie. Archiv 16 (1851).

2) Die Kurve besitzt nicht die charakteristische Eigenschaft der Schraubenlinie, ein konstantes Verhältnis von Krümmung und Torsion zu besitzen. Sie verdient also nicht den Namen Schraubenlinie. Da sie aber in der Literatur mehrmals „konische Schraubenlinie“ genannt wird, wurde sie hier erwähnt.

Unter der zylindro-konischen Schraubenlinie verstand man früher allgemein nur die Kurve, die die Erzeugenden eines Rotationskegels unter konstantem Winkel schneidet; sie ist der Schnitt eines Rotationskegels und eines Zylinders, der eine logarithmische Spirale als Basis hat.

Es läßt sich nun aber zeigen, daß noch andere zylindrische Schraubenlinien in einem endlichen oder unendlichen Teil ihrer Ausdehnung als konische Schraubenlinien aufgefaßt werden können, daß also noch andere Kurven den Namen „zylindro-konische Schraubenlinien" verdienen. Von ihnen wird später die Rede sein. (S. 44 ff.)

Wie oben schon erwähnt wurde, schneidet die zylindrokonische Schraubenlinie, der Schnitt eines Rotationskegels mit einem Zylinder auf einer logarithmischen Spirale als Basis,[1]) die Erzeugenden des Kegels unter konstantem Winkel; sie ist also die Loxodrome des Kegels.

Ihre Gleichungen sind:

$$x = h\, e^{a\varphi} \cos\varphi \quad y = h\, e^{a\varphi} \sin\varphi \quad z = h\, e^{a\varphi} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Bei der Ausbreitung des Kegels in die Ebene wird die Schraubenlinie in eine logarithmische Spirale transformiert.[2])

---

1) Diese Kurve ist zum ersten Mal von Guido Grandi in einem Brief an Th. Ceva untersucht worden. Er zeigt dort rein geometrisch, daß die Kurve, die aus dem Schnitt des Rotationskegels mit dem Zylinder auf einer logarithmischen Spirale hervorgeht, die Erzeugenden des Zylinders und des Kegels unter konstantem Winkel schneidet, wenn die Axe des Kegels eine Erzeugende des Zylinders ist. Später wurde sie von Olivier: Développements de géométrie descriptive. 1843 untersucht. Den Namen „zylindrokonische Schraubenlinie" gibt ihr zuerst P. Serret: Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure. Paris 1860.

2) Die Loxodromen des Rotationskegels wurden 1842 von E. W. Grebe: Über die Loxodromen auf dem gemeinen Zylinder und Kegel. Archiv 2. 1842 untersucht, ferner von Boymann: Entwicklung der Gleichungen der Loxodromen auf den Flächen zweiter Ordnung. Archiv 7. 1846 und Grunert: Archiv 21. 1853. Alle drei stellen die Gleichungen der Loxodromen des Kegels auf, nennen die Kurve aber nicht Schraubenlinie.

Aus meinen Darlegungen wird klar, daß Chasles: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. 1e edition 1837.

Auch die Durchschnittspunkte der Tangenten mit einer Horizontalebene durch die Spitze des Kegels bilden eine logarithmische Spirale.

b) Die Tangenten an die konische Spirale.

Die Tangenten an die konische Spirale sind geometrisch sehr einfach zu bestimmen. Die Kurve war definiert worden als der Schnitt der Wendelfläche mit dem Rotationskegel derselben Axe. Man legt also durch einen Punkt der Kurve zwei Tangentialebenen, eine an den Kegel, die andere an die Schraubenfläche; der Schnitt beider Ebenen ist die Tangente an die Kurve.[1])

c) Die Länge des Kurvenbogens.

Die Anwendung der allgemeinen Formel für die Bogenlänge einer Kurve:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\, dz$$

liefert für die konische Spirale:

$$s = \int_0^z \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\, (a - z)^2}\, dz,$$

wobei

$$k = \frac{2\pi}{h \cos \alpha};$$

die Integration ergibt

$$s = \frac{a}{2}\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{a - z}{2}\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\, (a - z)^2}$$

$$+ \frac{1}{2 k \operatorname{tg} \alpha} \lg \left\{ \frac{a k \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{(a - z) k \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\, (a - z)^2}} \right\}.$$

2e éd. 1876. S. 31, Note 1 einen Irrtum begeht, wenn er die Kurve, die Guido Grandi untersucht, als identisch mit der, die die Alten kannten, ansieht. Den Alten war die konische Spirale bekannt.

1) Die Bestimmung der Tangente begegnet uns schon bei Garbinsky: Graphische Methode für die Tangenten an die konische Spirale. Annales de mathématiques XVI. 1825. S. 167 ff.

Für $z = a$ hört die Kurve in der Spitze des Kegels auf; ihre ganze Länge beträgt demnach:[1])

$$l = \frac{a}{2}\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{2 k \operatorname{tg} \alpha} \lg \left\{ a k \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right\}.$$

Bei der zylindro-konischen Schraubenlinie wendet man die Formel für das Bogenelement besser in der Form an:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

Es ist

$$\frac{dx}{d\varphi} = h\, e^{a\varphi} [a \cos \varphi - \sin \varphi]$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = h\, e^{a\varphi} [a \sin \varphi + \cos \varphi]$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = a\, h \operatorname{ctg} \alpha\, e^{a\varphi}$$

$$s = \int_0^{\varphi} h\, e^{a\varphi} \sqrt{1 + a^2 + a^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}\, d\varphi$$

$$= \frac{h}{a} \sqrt{\frac{1 + a^2}{\sin^2 \alpha}}\, e^{a\varphi}.$$

Für einen Schraubengang läuft φ von 0 bis 2π.

d) Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte der zylindro-konischen Helix.

Oben war gezeigt worden, daß die Mittelpunkte der ersten Krümmung bei der gemeinen Schraubenlinie auf einer andern gemeinen Helix liegen, deren Zylinder zu dem ersten parallel ist. Ein entsprechender Satz läßt sich von der Krümmungsmittelpunktskurve der zylindro-konischen Schraubenlinie aussprechen.

---

1) Vgl. Dienger (1851) a. a. O.

Die beiden Rotationskegel der zylindro-konischen Schraubenlinie und ihrer Krümmungsmittelpunktskurve haben eine gemeinsame Axe und gemeinsame Spitze; ihre Halbwinkel an der Spitze λ und λ' erfüllen die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \lambda' = \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \lambda;$$

α und α' bedeuten dabei die Winkel, unter denen die beiden Schraubenlinien die Horizontalebene schneiden.

Aus der Gleichung folgt, daß, wenn die ursprüngliche zylindro-konische Schraubenlinie die Horizontalebene unter dem Winkel von 45^0 schneidet, dies auch bei ihrer Krümmungsmittelpunktskurve der Fall ist; die beiden Kegel fallen dann zusammen.[1]) Dies Resultat ist wieder dem entsprechenden bei der gewöhnlichen Schraubenlinie analog.

Übrigens sind die gemeine und die zylindro-konische Schraubenlinie die einzigen, bei denen die Krümmungsmittelpunktskurve wieder eine Schraubenlinie ist.

e) Die zylindro-konische Schraubenlinie als W-Kurve.

Während für die Entstehung der gemeinen Schraubenlinie eine unendlich kleine Schraubung als infinitesimale Transformation erforderlich ist, entsteht die eingliedrige projektive Gruppe G_1, deren Bahnkurven die gewöhnlichen zylindro-konischen Schraubenlinien sind, aus einer infinitesimalen Transformation, die dem Raume eine unendlich kleine Rotation um die Axe mit einer gleichzeitigen unendlich kleinen ähnlichen Vorgrößerung von einem Punkte der Axe aus erteilt. Wenn die Axe zur z-Axe, der Punkt zum Anfangspunkt gewählt wird, haben die Bahnkurven der Gruppe die Gleichungen:

$$r = \text{konst. } e^{\frac{b}{a}\vartheta}, \qquad z = \text{konst. } e^{\frac{b}{a}\vartheta^2}),$$

---

1) Diese Resultate gibt Tissot: Sur les hélices. Nouvelles Annales de Mathématiques 11 (1852) S. 454—459.

2) Ich folge wieder Scheffers a. a. O. Nr. 34.

wobei r, Θ Polarkoordinaten in der Ebene sind. Das sind die Gleichungen der gewönlichen zylindro-konischen Schraubenlinie.[1])

f) Andere zylindro-konische Schraubenlinien.

Wie schon S. 40 bemerkt wurde, sind die konische Spirale und die Loxodrome des Rotationskegels nicht die einzigen Schraubenlinien, die gleichzeitig auf einem Zylinder und einem Kegel liegen. Es gibt vielmehr eine ganze Schar von Schraubenlinien, die in einem endlichen oder unendlichen Teil ihrer Ausdehnung als konische Schraubenlinien aufgefaßt werden können. Von solchen Kurven lassen sich folgende Sätze aufstellen:

1. „Wird die große Axe einer Ellipse zur Rotationsaxe genommen, ist C eine Kurve der Rotationsfläche, deren Tangenten mit Parallelen zur Rotationsaxe einen konstanten Winkel bilden, so schneidet die Kurve C auch die Generatrizen einer konischen Fläche unter einem konstanten Winkel, deren Spitze einer der Brennpunkte der Ellipse ist. Die Projektion der Kurve C auf eine zur Rotationsaxe senkrechte Ebene ist eine Epizykloide."

2. „Wird die große Axe einer Hyperbel zur Rotationsaxe genommen, ist C eine Kurve der Rotationsfläche, deren Tangenten mit Parallelen zur Rotationsaxe einen konstanten Winkel bilden, so schneidet die Kurve C auch die Erzeugenden einer konischen Fläche unter einem konstanten Winkel, deren Spitze einer der Brennpunkte der Hyperbel ist."

3. „Wird die Axe einer Parabel zur Rotationsaxe genommen, ist C eine Kurve der Rotationsfläche, deren Tangenten mit Parallelen zur Rotationsaxe einen konstanten Winkel p bilden, so schneidet die Kurve C auch die Erzeugenden einer konischen Fläche unter dem konstanten Winkel p, deren Spitze der Brennpunkt der Parabel ist.

1) Vgl. S. 40.

Die Projektion der Kurve auf eine zur Rotationsaxe senkrechte Ebene ist die Evolvente eines Kreises.“ [1])

Zu ähnlichen Resultaten kommt man auch auf einem andern Wege. Man stellt die Bedingung, daß eine Schraubenlinie in einem endlichen oder unendlichen Teil ihrer Ausdehnung auf einem Kegel liege. Dann erhält man, wenn Θ und ϑ die Winkel sind, die die Kurve mit den Erzeugenden des Zylinders, bezw. des Kegels bildet, für den Krümmungsradius ϱ der Projektion der Kurve auf die x y-Ebene

$$(g)\quad \varrho = \sqrt{\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\Theta}{\sin^2\vartheta}\,s^2 + \frac{2\,h\sin\Theta\cos\Theta}{\sin^2\vartheta}\,s - \frac{h^2\sin^2\Theta}{\sin^4\vartheta}};$$

s ist dabei der Bogen dieser Projektion, h konstant.

Ist $h = 0$, so definiert die Gleichung für ϱ eine logarithmische Spirale. Die gesuchte Kurve ist die gewöhnliche zylindro-konische Schraubenlinie.

Die Gleichung (g) definiert die Projektion eindeutig für bestimmte Werte von Θ und ϑ. Unter den Kurven (g) gibt es zykloidische Linien; dafür muß der Koeffizient von s^2 negativ sein. Eine nähere Untersuchung lehrt, daß unter den zykloidischen Kurven nur die Epizykloide, und zwar nur ein begrenztes Stück von ihr, als gerader Schnitt des Zylinders der gesuchten Schraubenlinie in Betracht kommen kann.

Für $\Theta = \vartheta$ bestimmt die Gleichung (g) eine Kreisevolvente; der Radius des Kreises beträgt $h\,\mathrm{ctg}\,\Theta$. Dieses Resultat stimmt mit dem in Satz 3 [2]) überein: die Winkel, unter denen die Kurve die Mantellinien des Zylinders und des Kegels schneidet, sind gleich, und die Projektion auf die Ebene des geraden Schnittes ist eine Kreisevolvente.[3]) Also

1) Diese drei Sätze bringt Enneper a. a. O., 1866 und 1882. Vgl. auch G. Scheffers: Über Loxodromen, Berichte der Kgl. sächs. Ges. d. W. zu Leipzig. Math.-phys. Klasse Bd. 54, 1902, S. 370.

2) Vgl. S. 44.

3) Diese Resultate finden wir bei G. Pirondini: Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable. Journal für die reine und angewandte Mathematik 118 (1897).

läßt sich aus diesem Ergebnis schließen, daß die Schraubenlinie auf dem Kreisevolventenzylinder gleichzeitig eine Kurve konstanter Steigung auf dem Rotationsparaboloid ist, von der später die Rede sein wird.

Außer diesen besonderen Fällen lassen sich durch die Gleichung (g) eine ganze Schar von Kurven bestimmen, die alle Projektionen von zylindro-konischen Schraubenlinien sind.

Fast alle zylindro-konischen Schraubenlinien sind Schraubenlinien zweier Kegel. Von ihnen gelten folgende Sätze:

„Wenn eine Kurve doppelter Krümmung eine Schraubenlinie eines Zylinders und eines Kegels ist, so ist sie auch eine Schraubenlinie eines andern Kegels. Die geradlinigen Erzeugenden dieser beiden Kegel schneiden die Schraubenlinie unter gleichen Winkeln."

„Die gewöhnliche zylindro-konische Schraubenlinie und diejenige eines Zylinders, dessen gerader Schnitt eine Kreisevolvente ist, sind die einzigen Linien dieser Kurvenfamilie, die nicht Schraubenlinien eines zweiten Kegels sein können."

„Wenn eine auf einer Kugel gezeichnete Linie eine Schraubenlinie eines Kegels ist, so ist sie auch eine Schraubenlinie eines zweiten Kegels."[1])

Eine besondere zylindro-konische Schraubenlinie ist noch der Schnitt eines elliptischen Kegels mit einem parabolischen Zylinder. Wenn man nämlich die Kurven konstanter Steigung auf dem elliptischen Kegel:

$$z^2 = \frac{4}{3}\mu^2 x^2 + \mu^2 y^2$$

und die auf dem parabolischen Zylinder $z = 2\mu\sqrt{a\,x} + \mu\,y$ untersucht, so findet man, daß die beiden Arten von Schraubenlinien kongruente Kurven sind. Die beiden Flächen schneiden sich also in einer Kurve konstanter Steigung, deren Horizontalprojektion ist:

1) Pirondini a. a. O. (1897).

$$y = \left(\frac{x}{3a} - 1\right)\sqrt{a\,x},$$

wobei a die große Axe der Basisellipse des Kegels bedeutet.[1])

g) Die Tangentenfläche.

Die einzelnen Tangenten und damit die Tangentialfläche an die Schraubenlinien auf konischen Flächen lassen sich geometrisch sehr einfach konstruieren. Man legt in dem Punkt, für den man die Tangente bestimmen will, die Tangentialebene an den Kegel, die natürlich die Kurventangente enthält. Die Schnittgerade dieser Ebene mit der Horizontalebene schneidet die Tangente an den betreffenden Punkt der Horizontalprojektion in einem Punkt S. Die Verbindung des Punktes S mit dem Kurvenpunkt ist dann die gesuchte Tangente.[2])

---

1) Diese Schraubenlinie untersucht Huth: Kurven konstanter Steigung auf gegebenen Flächen. Programm No. 578 der Realschule zu Stollberg i. E. 1893.

In diesem Kapitel ist noch eine Arbeit von Piccioli: Sur quelques questions de la théorie des courbes à double courbure. Nouvelles annales (3) 18. 1899 zu erwähnen. Auch P. beweist allgemein, daß eine zylindrokonische Schraubenlinie nicht, wie früher stets angenommen wurde, auf einem Rotationskegel liegen muß. Aus der allgemeinen Gleichung der Kurve konstanter Steigung auf einem Kegel geht aber nicht hervor, daß der Winkel, den die Erzeugenden des Kegels mit seiner Axe bilden, konstant sein muß.

2) Diese Konstruktion der Tangenten gibt für die konische Spirale Franz Schiffner: Die developpable Fläche der konischen Schraubenlinie. Archiv 69. 1883.

Analytisch wird die Tangentenfläche der konischen Spirale bestimmt von Vallés: Annales de math. XVII. S. 158ff. 1827 bei der Lösung folgender Aufgabe: Ein vollkommen beweglicher und unausdehnbarer Faden ist so auf einem geraden Kegel befestigt, daß er genau den Umläufen einer daraufgezeichneten konischen Spirale folgt und in der Spitze endigt. Man wickle ihn so ab, daß er beständig Tangente an die konische Spirale bleibt. Welche Kurve beschreibt sein Endpunkt im Raum?

Die allgemeinen zylindrokonischen Schraubenlinien liegen, wie sich oben herausgestellt hat, gleichzeitig auf Flächen zweiter Ordnung. Als Schraubenlinien auf diesen Flächen sollen die Kurven in den nächsten Abschnitten betrachtet werden. Also die eben behandelten Kurven sind identisch mit denen der nächsten Abschnitte.

2. Schraubenlinien auf Rotationsflächen zweiter Ordnung.

Als gemeinsame Monge'sche Gleichung aller Schraubenlinien war aufgestellt worden:

$$dx^2 + dy^2 - k^2\,dz^2 = 0,^{1})$$

wobei k die Kotangente des konstanten Winkels der Tangenten gegen die Horizontalebene bedeutet. In anderer Form:

$ds^2 = k^2\,dz^2$, ds ist das Bogenelement der Projektion.

$$s = k\,z$$

$$z = \frac{s}{k}.$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit der Gleichung der besonderen Fläche, für die die Schraubenlinie gesucht wird, läßt sich die Kurve bestimmen. Besonders einfach wird die Untersuchung bei den Rotationsflächen zweiter Ordnung.

a) Die sphärischen Schraubenlinien.

Die Gleichung der Kugel hat die Form:

$$z = \sqrt{a - x^2 - y^2}.$$

Die Projektion der Schraubenlinie auf die x y-Ebene, die wir horizontal annehmen, ergibt sich aus der Flächengleichung, wenn man darin für z den oben aus der

1) Vgl. S. 30.

Monge'schen Gleichung der Schraubenlinien gewonnenen Wert einsetzt,[1]) also, da bei der Rotationsfläche $x^2 + y^2 = r^2$ gesetzt werden kann,

$$r^2 + \frac{s^2}{k^2} = a.$$

Daraus kann man sofort die natürliche Gleichung der Projektion der Schraubenlinie bestimmen:

$$\varrho^2\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^2 + \frac{s^2}{k^2} = a,$$

$$(1) \qquad \frac{\varrho^2\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^2}{a} + \frac{1}{k^2}\,\frac{s^2}{a} = 1.$$

Da $$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^2} < k^2$$

und die Faktoren von s^2 und ϱ^2 positiv, so bestimmt die Gleichung (1) eine Epizykloide.[2])

Daraus lassen sich die Gleichungen für die Koordinaten leicht bestimmen. Sie lauten allgemein:

$$x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\left(\frac{R + r}{r}\right)\varphi,$$

$$y = (R + r)\sin\varphi - r\sin\left(\frac{R + r}{r}\right)\varphi,$$

wobei R den Radius des festen, r den des rollenden Kreises bedeutet. Es ist also $R + 2r = \sqrt{a}$.

---

1) Vgl. W. Blaschke: Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. Monatshefte für Math. und Phys. 19. 1908. S. 188 ff.

2) Vgl. Loria: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. II. 1911. Abschnitt VI. Kap. 10, S. 105 und 121.

Daraus ergibt sich:

$$\varrho^2 = \frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - y'x'')^2} = \frac{16\,r^2}{a}(\sqrt{a} - r)^4 \sin^2\left[\frac{\sqrt{a} - 2r}{2r}\varphi\right]$$

$$s^2 = \left[\int \sqrt{x'^2 + y'^2}\,d\varphi\right]^2 = \frac{16\,r^2(\sqrt{a} - r)^2}{(\sqrt{a} - 2r)^2}\cos^2\left[\frac{\sqrt{a} - 2r}{2r}\varphi\right]$$

Offenbar ist r abhängig von der Steigung k der Kurve; r läßt sich als Funktion von k bestimmen. Man setze dazu die eben gefundenen allgemeinen Werte von ϱ und s in die natürliche Gleichung unserer speziellen Epizykloide; aus dieser Gleichung wird dann:

$$\frac{16\,r^2(\sqrt{a} - r)^4}{a^2}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^2 \sin^2\left[\frac{\sqrt{a} - 2r}{2r}\varphi\right] + \frac{16\,r^2(\sqrt{a} - r)^2}{(\sqrt{a} - 2r)^2\,k^2\,a}\cos^2\left[\frac{\sqrt{a} - 2r}{2r}\varphi\right] = 1.$$

Diese Gleichung muß für alle Werte von φ identisch erfüllt sein, also auch für $\varphi = 0$. Dafür aber wird:

$$\sin^2\left[\frac{\sqrt{a} - 2r}{2r}\varphi\right] = 0,\ \cos^2[\ldots] = 1,$$

also haben wir zur Bestimmung von r die Gleichung:

$$4r(\sqrt{a} - r) = k\sqrt{a}\,[\sqrt{a} - 2r]$$

$$r = \frac{\sqrt{a}}{2}\left[1 + \frac{k}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{k^2}{4}}\right].$$

Daraus lassen sich sofort die Gleichungen der Projektion hinschreiben; in Verbindung mit der Gleichung $\frac{s}{k} = z$ ergeben sie die Gleichungen der gesuchten Schraubenlinie. Diese lauten, wenn $\frac{k}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{k^2}{4}} = c$ gesetzt wird:

$$x = \frac{\sqrt{a}}{2}\left\{(1-c)\cos\varphi - (1+c)\cos\left(\frac{1-c}{1+c}\varphi\right)\right\},$$

$$y = \frac{\sqrt{a}}{2}\left\{(1-c)\sin\varphi - (1+c)\sin\left(\frac{1-c}{1+c}\varphi\right)\right\},$$

$$z = \sqrt{a}\cos\left(\frac{c}{1+c}\varphi\right).$$

Man kann sich die sphärischen Schraubenlinien beschrieben denken von den Punkten eines größten Kugelkreises, der, ohne die Kugel zu verlassen, auf einem kleinen Kugelkreise abrollt. Er umhüllt dabei auch den diamentralgegenüberliegenden kongruenten Kreis.[1]) Da der große Kreis beständig normal zu den Bewegungsrichtungen seiner Punkte ist, so folgt, daß der zweite kleine Kreis die sphärische Evolute der Schraubenlinie ist.[2])

Man kann die sphärische Schraubenlinie auch erzeugen, wenn man einen Kreiszylinder mit dem Radius a ohne zu gleiten auf einem andern mit dem Radius b rollen läßt. Die Punkte einer festen Erzeugenden des beweglichen Zylinders,

---

1) Die Kurve, die durch Rollen eines größten Kugelkreises auf einem kleinen Kugelkreise entsteht, hat schon früh das Interesse der Mathematiker geweckt. Im Jahrgang 1732 der „Histoire de l'Académie royale des sciences. Avec les mémoires." untersuchen Bernoulli, De Maupertuis, Nicole und Clairaut unabhängig von einander die sphärischen Epizykloiden, d. h. die Kurven, die von den Punkten eines Kreises beschrieben werden, der auf einem andern Kreise abrollt und dessen Ebene mit der Ebene des festen Kreises einen konstanten Winkel bildet. Unter diesen Kurven finden sie eine, die algebraisch rektifizierbar ist. Dazu muß, wenn a der Radius des festen, r der des rollenden Kreises, φ der Neigungswinkel der Ebenen der beiden Kreise bedeutet, gelten $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, d. h. der rollende Kreis muß ein größter, der feste ein kleiner Kugelkreis sein. Als Schraubenlinien sind diese Kurven erst von P. Serret erkannt worden.

2) Diese Darstellung finden wir bei P. Serret: Théorie géométrique et mécanique des lignes à double courbure. Paris 1860. S. 39 und S. 53.

die in der Entfernung $2a + b$ von einem Punkt der Axe bleiben, beschreiben die sphärische Schraubenlinie.[1])

Wir hatten oben[2]) festgestellt, daß die Horizontalprojektion der sphärischen Schraubenlinie eine Epizykloide ist. Man kann also die Kurve als Schnitt eines Zylinders mit epizykloidischer Basis und einer Kugel betrachten. Da der epizykloidische Zylinder unter Umständen eine algebraische Fläche sein kann, die Schraubenlinie dann also der Schnitt zweier algebraischer Flächen ist, folgt, daß die sphärische Schraubenlinie auch eine algebraische Kurve sein kann.[3]) Unter allen algebraischen sphärischen Kurven, die bis jetzt bekannt sind, ist die Schraubenlinie die einzige, die algebraisch rektifizierbar ist.[4])

---

1) Auf diese Weise läßt E. Cesàro: Sur l'emploi des coordonnées intrinséques. Nouvelles annales (3) 5. 1886, die Kurve entstehen.

2) Vgl. S. 49.

3) Auf andere Weise erhält dieses Resultat Buffone: Studio di un elica sferica et algebraica. Giornale di matematiche. 34. 1896. Er stellt die Gleichungen der sphärischen Helix als Funktionen des Parameters φ auf und zeigt, daß in gewissen Fällen die Koordinaten eines beliebigen Punktes als algebraische Funktionen eines Parameters $v = \sin \varphi$ ausgedrückt werden können. Daß diese sphärischen Epizykloiden algebraisch sein können, zeigt schon Bernoulli a. a. O. § 17. S. 244. Er untersucht im besonderen dann eine dieser algebraischen Kurven auf der Kugel mit dem Radius 2, die die konstante Neigung $\operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{3}$ besitzt. Ihre Gleichungen lauten

$$x = 3 \sin \varphi - 2 \sin^3 \varphi$$
$$y = 2 \cos^3 \varphi$$
$$z = \sqrt{3} \sin \varphi.$$

Als Projektion auf die Horizontalebene erhält er

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = \frac{27}{4} y^2,$$

also die Epizykloide mit 2 Spitzen. Die Schraubenlinie selbst ist auch eine Kurve sechsten Grades.

Vgl. ferner E. Salkowski: Schraubenlinien und Loxodromen. Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft 1908, ausserdem E. Salkowski: Zur Transformation der Raumkurven. Math. Ann. 66.

4) Außer Bernoulli, Maupertuis, Nicole und Clairaut (Vgl. S. 51), wird die Rektifikation ausgeführt von Euler, De curva rectificabili in superficie sphaerica. Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. T. XV. (pro Anno 1770.) 1771.

Bei der Abwicklung der Tangentenfläche der sphärischen Helix transformiert sich diese in eine zykloidische Linie, und zwar in eine Epizykloide oder in eine Hypozykloide, je nachdem der konstante Winkel der Kurve mit den Erzeugenden ihres Zylinders $\gtrless 45^0$ beträgt. Ist der Winkel gleich 45^0, so verwandelt sich die Kurve bei der Abwicklung der Böschungsfläche in eine Zykloide.[1])

Die geometrische Anschauung lehrt, daß eine Kurve mit konstanter Steigung ε nicht bis zum Pole gehen kann.[2]) Vom Pole aus beginnt jede Kurve mit der Steigung null. Diese geometrische Betrachtung wird durch die analytischen Formeln verifiziert. Die Kurve konstanter Steigung ε ist nur möglich innerhalb der Kugelzone, die durch die Werte $x = R \cos \varepsilon$ und $x = -R \cos \varepsilon$ bestimmt ist.[3])

Alle Schraubenlinien einer gegebenen Steigung auf der Kugel bilden eine einparametrige Schar von symmetrischen Kurven, die die Kugelzone überall dicht und zwar zweifach, nach Art eines Netzes, überdecken. Auf den beiden Kalotten wird die Kurve imaginär.

Alle Kurven des Netzes kann man sich entstanden denken durch Abwicklung eines unausdehnbaren Fadens von dem Parallelkreise, der die Kugelzone begrenzt. Rollt man den Faden, der die Kugel nicht verlassen darf, einmal in diesem und einmal in jenem Drehungssinne ab, so werden

---

1) Diese Sätze gibt Cesàro a. a. O. und in: Vorlesungen über natürliche Geometrie. Deutsch von Kowalewski. Leipzig 1901. (Original 1900.)

2) Darauf macht zuerst aufmerksam Martin: Solution of Question 4862. Mathematical questions with their solutions from the „Educational times“. Vol. XXXIX (1885). Es ist folgende Aufgabe dort gelöst: Eine Straße von konstanter Steigung soll auf einem Hügel in Form eines Kugelabschnittes vom Durchmesser 2 a und der Höhe b bestimmt werden. Die Gleichung der Kurve, die Länge der Straße und der Punkt, bis zu dem sie aufsteigt, wird berechnet.

3) Zu demselben Resultat kommt auch Hoppe: Zur analytischen Kurventheorie. Archiv (2) 15. 1897.

durch seine Punkte sämtliche Kurven der einparametrigen Schar beschrieben. In ihrer Entstehung entspricht die Kurve von konstanter Steilheit auf der Kugelfläche der Kreisevolvente in der Ebene, in die sie durch geeignete Grenzbetrachtung übergeführt werden kann.[1])

Bei der gemeinen Schraubenlinie und der gewöhnlichen zylindro-konischen Schraubenlinie hatte sich ergeben, daß die Kurven identisch sind mit den Loxodromen des Rotationszylinders bezw. Kegels; im allgemeinen aber sind die Loxodromen wesentlich verschieden von den Schraubenlinien. Die Winkel der Schraubenlinien mit den Meridianen der Kugel sind durchaus nicht konstant.[2])

In dem Abschnitt über die Schraubenlinien auf konischen Flächen war erwähnt worden, daß die Schraubenlinie auf einem Zylinder mit epizykloidischer Basis gleichzeitig Helix eines Kegels ist; also kann man die sphärische Schraubenlinie auch zu den zylindro-konischen rechnen.[3])

b) Die Schraubenlinien auf dem Rotationsparaboloid.

Das Rotationsparaboloid mit vertikaler Rotationsaxe hat die Gleichung:

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0.$$

Damit verbinden wir wieder die allgemeine Differentialgleichung:

$$dx^2 + dy^2 - k^2 dz^2 = 0,$$

oder $$ds^2 = k^2 dz^2,$$

aus der $$s = kz$$

---

1) Diese Erläuterungen bringt Jonas: Kurven von konstanter Steilheit auf der Kugel. Archiv (3) 8. 1905.

2) Daher ist es unrichtig, wenn Laisant: Sur la loxodromie d'une surface de révolution quelconque. Nouvelles annales. (2) 13. 1874 die Loxodrome der Kugel „sphärische Schraubenlinie“ nennt. Einen analytischen Zusammenhang, der die endlichen Gleichungen der allgemeinen Loxodromen aufzustellen gestattet, gibt E. Salkowski: Schraubenlinien und Loxodromen. Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft. 1908.

3) Vgl. S. 44.

gewonnen wird, um die Schraubenlinie auf dem Rotationsparaboloid zu bestimmen.

Die Gleichung der Horizontalprojektion der gesuchten Kurve wird wieder gefunden, indem man in der Flächengleichung z als Funktion des Bogens der Projektion ausdrückt. Die Gleichung lautet dann:

$$z^2 + y^2 - \frac{2p}{k} s = 0,$$

oder, da $x^2 + y^2 = r^2$ gesetzt werden kann:

$$r^2 - \frac{2p}{k} s = 0.$$

Daraus erhält man als natürliche Gleichung der Projektion:

$$\varrho^2 \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^2 - \frac{2p}{k} s = 0.$$

Die Gleichung stellt eine Kreisevolvente dar; sie läßt sich in Parameterform darstellen:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= a (\cos u + u \sin u) \\ y &= a (\sin u - u \cos u), \end{aligned}$$ [1])

die Gleichung $z = \frac{s}{k}$ ergänzt das Gleichungspaar (1) zum System der drei Gleichungen der Helix. Aus (1) folgt:

$$s = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du = \frac{a}{2} u^2,$$

also lauten die Gleichungen der Schraubenlinie:

$$\begin{aligned} x &= a (\cos u + u \sin u) \\ y &= a (\sin u - u \cos u) \\ z &= \frac{a}{2k} u^2. \end{aligned}$$ [2])

---

1) Auch Huth a. a. O. gibt als Horizontalprojektion die Gleichung der Kreisevolvente, und zwar in Polarkoordinaten:

$$\Theta - \vartheta = \frac{\sqrt{r^2 - (\mu p)^2}}{\mu p} - \arccos \frac{\mu p}{r}.$$

2) Diese Gleichungen entwickelt A. zur Kammer: Zur Theorie der Kurven in analytischer Behandlungsweise. Archiv (2) 15. 1897.

Da die Hauptnormalen den entsprechenden Normalen der Horizontalprojektion parallel sind, diese aber sämtlich Tangenten an die Evolute sind, so folgt, daß die Hauptnormalen der Schraubenlinie auf dem Kreisevolventenzylinder den geraden Kreiszylinder berühren, der den Evolutkreis zur Basis hat.

Der Ort der Zentren der Schmiegungskugeln ist, wie oben[1]) bewiesen wurde, für jede Schraubenlinie wieder eine Schraubenlinie. Die Helix des Rotationsparaboloids hat eine Schraubenlinie gleicher Art als Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln;[2]) diese Eigenschaft hat sie mit der gewöhnlichen Schraubenlinie gemein.

Die Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte ist von den Hauptnormalen in den betreffenden Punkten in konstanter Entfernung.[3]) Da die kürzeste Entfernung des Mittelpunktes der Schmiegungskugel von der Hauptnormale die Krümmungsaxe, d. h. die Verbindung zwischen Krümmungsmittelpunkt und Zentrum der Schmiegungskugel ist, so folgt, daß die Krümmungsmittelpunktskurve konstanten Abstand von der Gratlinie der Polarfläche hat.

Der Radius des Evolutkreises dieser Gratlinie beträgt $\frac{a}{k^2}$, der Steigungswinkel ergänzt den der Urkurve zu 90^0. Der Anfangspunkt liegt diametral gegenüber.

Aus diesen Sätzen folgt, daß die Gratlinie der Polarfläche dieser Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte mit der Urkurve auf demselben Zylinder liegt und dieselbe Steighöhe hat, also der Urkurve kongruent ist; sie ist also eine der Aoust'schen Schraubenlinien, von denen später[4]) die Rede sein wird. Die n-te Polarkurve liegt mit der Urkurve

---

1) Vgl. S. 37.

2) Hergeleitet wird dieser Satz von A. zur Kammer a. a. O. und von Pirondini: Sur quelques lignes liées à l'hélice cylindrique. Journal für Mathematik. 121. 1900.

3) Vgl. Pirondini a. a. O.

4) Vgl. S. 67 ff.

auf demselben Zylinder oder auf dem der ersten Polarkurve, je nachdem n gerade oder ungerade ist.[1])

Ist der Steigungswinkel 45°, so sind alle Polarkurven mit der Urkurve kongruent; sie liegen alle auf demselben Zylinder.[2])

Der konstante Abstand der Krümmungsmittelpunktkurve von der Gratlinie der Polarfläche beträgt:

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{a}{\sin^2 \varepsilon \cos \varepsilon}.$$

Es läßt sich zeigen, daß, wenn ϱ den Krümmungsradius, ϑ und τ Krümmungs- bezw. Torsionswinkel bedeuten, außer $\frac{d\varrho}{d\vartheta}$ auch $\frac{d\varrho}{d\tau}$ konstant ist. Diese Eigenschaft kommt nur den Schraubenlinien auf Kreisevolventenzylindern zu. Daraus ergibt sich eine Verallgemeinerung des Puiseux'schen Problems,[3]) nämlich der Satz: „Ist für eine Raumkurve der Krümmungsradius ϱ eine lineare Funktion von ϑ und τ, so ist sie Schraubenlinie auf einer Zylinderfläche, deren Basis eine Kreisevolvente ist. Hierin ist der Puiseux'sche Satz als Spezialfall enthalten, daß die Schraubenlinien mit konstantem Krümmungsradius Schraubenlinien eines Kreiszylinders sind.“[4])

1) Auch diese Sätze begegnen uns zum größten Teil bei A. zur Kammer a. a. O.

2) Vgl. Jackstein: Ausdehnung eines von Puiseux für ebene Kurven behandelten Problems auf Raumkurven. Dissertation Halle 1888. J. stellt sich die Aufgabe, die Kurven zu finden, die der Rückkehrkante ihrer Evolutenfläche so kongruent sind, daß bei der Koinzidenz die wegen der geometrischen Beziehung zu einander gehörigen Punkte zusammenfallen. Als Lösung ergeben sich die gemeine Schraubenlinie und die Helix auf dem Rotationsparaboloid mit dem Steigungswinkel $\frac{\pi}{4}$.

3) Vgl. S. 20 ff.

4) Vgl. wieder A. zur Kammer a. a. O. Neuerdings hat zur Kammer seine Untersuchungen aufs technische Gebiet ausgedehnt. Er hat die Schraubenlinie des Rotationsparaboloids zur Grundlage einer Propellerfläche gemacht. Die Theorie dieser Fläche entwickelt er in Achenbach: Über die Schiffsschraube. III. Bd. Kiel. Leider ist es mir nicht gelungen, das Werk zur Einsicht zu erhalten.

c) Die Schraubenlinien auf den Rotationsflächen zweiter Ordnung mit Mittelpunkt.

Für die Schraubenlinie auf der Kugel hatten wir die beiden Bedingungsgleichungen

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 - k^2\,dz^2 = 0$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die für die Schraubenlinien auf den andern Rotationsflächen zweiter Ordnung mit Mittelpunkt, auf dem Ellipsoid, dem einmantligen und dem zweimantligen Hyperboloid, leicht bestimmen. Durch die Transformation:

$$x = x_1$$
$$y = y_1$$
$$z = z_1 \sqrt{\frac{a}{b}}$$

geht die Kugelgleichung in die des Ellipsoids über, wenn $a > 0$, $b > 0$; in die des einmantligen Hyperboloids für $a > 0$, $b < 0$ und in die des zweimantligen Hyperboloids für $a < 0$, $b > 0$. Die Differentialgleichung lautet bei dieser Transformation

$$dx_1^{\,2} + dy_1^{\,2} - k^2 \frac{a}{b}\, dz_1^{\,2} = 0;^{1})$$

sie ist für beide Hyperboloide identisch — für beide Flächen wird $k^2 \frac{a}{b}$ negativ.

Wir betrachten zunächst die Schraubenlinie auf dem Ellipsoid. Sie geht aus der auf der Kugel dadurch hervor, daß man k durch $k_1 = k \sqrt{\frac{a}{b}}$ ersetzt, also durch eine Streckung in Richtung der z-Axe. Da $\frac{a}{b}$ positiv vor-

1) Auf diesen hier von mir zum ersten Mal gegebenen Zusammenhang hat mich Herr Professor Dr. E. Salkowski in Charlottenburg aufmerksam gemacht.

ausgesetzt wurde, ändert diese Substitution nichts an der Form der Gleichungen. Die Projektion auf die x y-Ebene ist also gleichfalls eine Epizykloide.[1]) Die endlichen Gleichungen der Schraubenlinien auf dem Rotationsellipsoid erhält man aus denen der Kugel durch Einsetzen von $k\sqrt{\frac{a}{b}}$ statt k und Multiplikation des Ausdrucks für z mit $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Verschiedene Eigenschaften, die von der Schraubenlinie auf der Kugel gelten, lassen sich mithin sofort auf die des Rotationsellipsoids übertragen. Es erübrigt sich also, sie hier noch einmal aufzuzählen.

Die Gleichungen der Schraubenlinien des Ellipsoids haben die Form:

$$x = m\,[\cos u\ \cos g\,u + g \sin u\ \sin g\,u]$$
$$y = m\,[\cos u\ \sin g\,u - g \sin u\ \cos g\,u]$$
$$z = m\,\frac{\sin p\ \cos p - \sin q\ \cos q\ \cos u}{\sin^2 p - \sin^2 q},$$

wobei $m = c \cos q$, c eine Konstante, g den konstanten Steigungswinkel, p den konstanten Winkel der Kurve mit den Erzeugenden des Kegels, auf dem sie gleichzeitig liegt,[2]) $g = \frac{\sin p}{\sqrt{\sin^2 p - \sin^2 q}}$ bedeuten.

Die Gleichung des einmantligen Hyperboloids geht aus der der Kugel durch die Substitution hervor

$$x = x_1$$
$$y = y_1$$
$$z = z_1\sqrt{\frac{a}{-b}} = -\,i\,z_1\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

---

1) Als Projektion finden die Epizykloide, allerdings unabhängig von der hier dargestellten Auffassung, Enneper: Zur Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Math. Annalen XIX. 1882. Stübler: Archiv (3) 15. Blaschke: a. a. O. 1908.

2) Vgl. auch S. 44.

Die Differentialgleichung wird dann:

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 \frac{a}{b} k^2 = 0.$$

Um zu der natürlichen Gleichung der Projektion der gesuchten Kurve zu gelangen, hat man in die der Projektion der sphärischen Schraubenlinie also k^2 durch $-\frac{a}{b} k^2$ zu ersetzen. Wir erhalten:

$$\frac{\varrho^2}{a}\left(1 - \frac{b}{ak^2}\right)^2 + \frac{s^2}{ak^2} = 1.$$

Die Projektion ist eine Hypo- oder Hyperzykloide, je nachdem die Steilheit der Schraubenlinie größer oder kleiner als die Neigung des Asymptotenkegels ist. Ist die Steilheit gleich der Neigung des Asymptotenkegels, so ist die Projektion eine Gerade.[1])

Interessant sind die Beziehungen der Schraubenlinien auf dem einmantligen Rotationshyperboloid zu den Schraubenlinien auf der Fläche, die durch Rotation der Sinuslinie

$$x_0 = a \sin\left(\frac{z_0}{a} \operatorname{tg} i\right)$$

um die z-Axe erzeugt wird. Die Formeln

$$x = a b \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2},\ y = a b \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2},\ z = -a \operatorname{ctgi} \operatorname{arctg}\left[\frac{z_1}{b} \operatorname{tgi}\right]$$

$$x_1 = a b \frac{x}{x^2 + y^2},\ y_1 = a b \frac{y}{x^2 + y^2},\ z_1 = -b \operatorname{ctgi} \operatorname{arctg}\left[\frac{z}{a} \operatorname{tgi}\right]$$

transformieren die Flächen ineinander. Für die Schraubenlinien ergibt sich dann der Satz: „Jede Schraubenlinie der

---

1) Vgl. Blaschke a. a. O. (1908) und Stübler a. a. O. Huth a. a. O. (1893) hatte als Projektion eine Gerade $x = a$ gefunden. Eine Gerade als Kurve konstanter Steigung ergibt sich aber nur in dem besonderen Fall, wenn die Steigung der Kurve gleich der Steigung des Asymptotenkegels ist. Huths Ergebnis ist also nicht zutreffend.

ersten Fläche, die einem Zylinder angehört, dessen Erzeugende parallel zur Rotatationsaxe sind, wird zurückgeführt in eine Kurve derselben Art auf der transformierten Fläche; die Neigungen der beiden Schraubenlinien gegen die Erzeugenden der entsprechenden Zylinder sind dieselben. Die geradlinigen Erzeugenden des Hyperboloids entsprechen auf der anderen Fläche den zirkulären Schraubenlinien."[1])

Für das zweimantlige Hyperboloid unterwerfen wir die Kugelgleichung der Transformation:

$$x = x_1$$
$$y = y_1$$
$$z = z_1 \sqrt{\frac{-a}{b}} = i z_1 \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Die Monge'sche Gleichung der Schraubenlinie lautet dann:

$$dx^2 + dy^2 + \frac{a}{b} k^2 dz^2 = 0.$$

Die natürliche Gleichung der Projektion der gesuchten Kurve wird:

$$-\frac{\varrho^2}{a}\left(1 - \frac{b}{ak^2}\right)^2 + \frac{s^2}{ak} = 1.$$

Die Projektion ist nur dann eine reelle Kurve, wenn die Steilheit der Schraubenlinie kleiner als die Neigung des Asymptotenkegels ist, und zwar ist dann die Projektion eine Parazykloide,[2]) d. h. eine Kurve, die durch Rollen eines komplexen Kreises auf einem reellen erzeugt wird.

Die endlichen Gleichungen der Schraubenlinie auf dem zweimantligen Rotationshyperboloid lauten:

---

1) G. Pirondini: Sulla teoria delle superficie di rivoluzione. Annali di mat. (2) XVIII. 1890. Vgl. auch S. 66.

2) Vgl. Blaschke a. a. O. Stübler a. a. O. gibt im allgemeinen als Projektion die Parazykloide an.

$$x = m\left[\frac{e^u + e^{-u}}{2}\cos g\,u + g\frac{e^u - e^{-u}}{2}\sin g\,u\right]$$

$$y = m\left[\frac{e^u + e^{-u}}{2}\sin g\,u - g\frac{e^u - e^{-u}}{2}\cos g\,u\right]$$

$$z = m\,\frac{-\sin p\cos p + \sin q\cos q\,\frac{e^u + e^{-u}}{2}}{\sin^2 q - \sin^2 p}.$$ [1])

Allen Schraubenlinien auf Zylindern mit einer zykloidischen Kurve als Basis kommen noch folgende Eigenschaften zu.

Wenn (M) eine Schraubenlinie, (0) die Kurve der Zentren ihrer Schmiegungskugeln bedeutet, so besteht folgender Satz:

„Die einzigen Schraubenlinien (M) bei denen der Bogen zwischen zwei Punkten proportional ist dem Bogen der Schraubenlinie (0), des Orts der Mittelpunkte ihrer Schmiegungskugeln, genommen zwischen den korrespondierenden Punkten, sind diejenigen auf einem Zylinder, dessen gerader Schnitt eine zykloidische Kurve ist, d. h. eine Kurve, für die zwischen dem Krümmungsradius und dem Bogen eine Relation besteht, die zurückgeht auf die folgende:

$$\varrho^2 = a\,s^2 + 2\,b\,s + c,$$

wobei a, b, c Konstanten sind, die nicht gleichzeitig null sein können."

Jede Raumkurve kann angesehen werden als der Ort der Mittelpunkte der Oskulationskugeln einer doppelt unendlichen Schar von Kurven.[2]) Die zykloidischen Schrauben-

---

1) Diese Gleichungen leitet her: Enneper, Zur Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Math. Annalen 19 (1882). Die Bedeutung der Buchhstaben m, g, p, q siehe S. 59.

2) Vgl. Cesàro: Geometria Intrinseca. 1900. p. 146.

linien haben nun die charakteristische Eigenschaft, daß der Ort der Mittelpunkte ihrer Oskulationskugeln und die doppelt unendliche Kurvenschar, für die eine zykloidische Schraubenlinie Ort der Zentren der Schmiegungskugeln ist, wieder zykloidische Schraubenlinien von demselben Typus sind.[1])

3. Die Kurven konstanter Steigung auf dreiaxigen Flächen zweiter Ordnung.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Kurve konstanter Steigung:

$$dx^2 + dy^2 - k^2 dz^2 = 0$$

auf der Fläche:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \qquad (1)$$

zu bestimmen.[2])

Durch die Transformation:

$$x_1 = x$$
$$y_1 = y$$
$$z_1 = i\,k\,z$$

geht die Kurve (1) über in die Kurve

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = 0,$$
$$\frac{x_1^2}{a} + \frac{y_1^2}{b} - \frac{z_1^2}{k^2 c} = 1,$$

d. h. in eine Minimalkurve einer Fläche 2. Ordnung, die aus der ersten durch Streckung in der Richtung der z-Axe

---

1) Diese Eigenschaften bringt Vittorio Strazzeri, Le eliche cilindriche. Sassari. Chiarella. 1901.

2) Auf die folgende bisher noch nicht bekannte Art der Darstellung wies mich wieder Herr Professor Dr. Salkowski in Charlottenburg in dankenswerter Weise hin.

hervorgeht. Die Bestimmung der Minimalkurven einer Fläche 2. Ordnung ist ein Problem, das mit dem der konformen Abbildung der Fläche auf die Ebene analytisch äquivalent ist und im Anschluß an Jacobi etwa folgendermaßen gelöst werden kann.

Wenn $\sqrt{b}$ und $\sqrt{c}$ zwei Konstanten bedeuten, von denen $c > b$, und $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ drei Größen sind mit der Bestimmung:

$$\varrho > \sqrt{c} > \varrho_1 > \sqrt{b} > \varrho_2,$$

so bedeuten:

$$1 = \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c} \text{ ein Ellipsoid,}$$

$$1 = \frac{x^2}{\varrho_1^2} + \frac{y^2}{\varrho_1^2 - b} + \frac{z^2}{\varrho_1^2 - c} \text{ ein einmantliges Hyperboloid,}$$

$$1 = \frac{x^2}{\varrho_2^2} + \frac{y^2}{\varrho_2^2 - b} + \frac{z^2}{\varrho_2^2 - c} \text{ ein zweimantliges Hyperboloid.}$$

Betrachtet man x, y, z als Funktionen von $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$, so ergibt sich für das Linienelement:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{(\varrho^2 - \varrho_1^2)(\varrho^2 - \varrho_2^2)}{(\varrho^2 - b)(\varrho^2 - c)} d\varrho^2$$

$$+ \frac{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)}{\varrho_1^2 - b)(\varrho_1^2 - c)} d\varrho_1^2 + \frac{(\varrho_2^2 - \varrho^2)(\varrho_2^2 - \varrho_1^2)}{(\varrho_2^2 - b)(\varrho_2^2 - c)} d\varrho_2^2.$$

Ist ϱ konstant, so gilt diese Gleichung für das Ellipsoid; für das einmantlige Hyperboloid, wenn ϱ_1 konstant, und für das zweimantlige Hyperboloid, wenn $\varrho_2 \neq$ konstant ist.

Für das Ellipsoid ergibt sich also:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\left[\frac{(\varrho^2 - \varrho_1^2)\,d\varrho_1^2}{(\varrho_1^2 - b)(c - \varrho_1^2)} + \frac{(\varrho^2 - \varrho_2^2)\,d\varrho_2^2}{(b - \varrho_2^2)(c - \varrho_2^2)}\right]$$

$$= (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\left[\sqrt{\frac{\varrho^2 - \varrho_1^2}{(\varrho_1^2 - b)(c - \varrho_1^2)}}\,d\varrho_1 + i\sqrt{\frac{\varrho^2 - \varrho_2^2}{(b - \varrho_2^2)(c - \varrho_2^2)}}\,d\varrho_2\right]$$

$$\cdot\left[\sqrt{\frac{\varrho^2 - \varrho_1^2}{(\varrho_1^2 - b)(c - \varrho_1^2)}}\,d\varrho_1 - i\sqrt{\frac{\varrho^2 - \varrho_2^2}{(b - \varrho_2^2)(c - \varrho_2^2)}}\,d\varrho_2\right].^{1})$$

Eine Minimalkurve auf dem Ellipsoid ist also gegeben durch die Gleichung:

$$(I)\quad \varrho_1^2 - \varrho_2^2)\left[\frac{(\varrho^2 - \varrho_1^2)\,d\varrho_1^2}{(\varrho_1^2 - b)(c - \varrho_1^2)} + \frac{(\varrho^2 - \varrho_2^2)\,d\varrho_2^2}{(b - \varrho_2^2)(c - \varrho_2^2)}\right] = 0.$$

Da $\varrho_1 \neq \varrho_2$ vorausgesetzt wurde, folgt aus der Gleichung (I)

$$\int\sqrt{\frac{\varrho^2 - \varrho_1^2}{(\varrho_1^2 - b)(c - \varrho_1^2)}}\,d\varrho_1 + i\int\sqrt{\frac{\varrho^2 - \varrho_2^2}{(b - \varrho_2^2)(c - \varrho_2^2)}}\,d\varrho_2 = 0,$$

oder

$$\int\sqrt{\frac{\varrho^2 - \varrho_1^2}{(\varrho_1^2 - b)(c - \varrho_1^2)}}\,d\varrho_1 - i\int\sqrt{\frac{\varrho^2 - \varrho_2^2}{(b - \varrho_2^2)(c - \varrho_2^2)}}\,d\varrho_2 = 0.$$

Mit diesen elliptischen Integralen hat man also die Minimalkurven:

$$(1)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

auf dem Ellipsoid

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0.$$

So läßt sich also die Bestimmung der Gleichungen der Schraubenlinie auf dem dreiaxigen Ellipsoid auf die der Minimalkurven zurückführen.

Die Entwicklung ist für die Kurven konstanter Steigung auf den beiden Hyperboloiden entsprechend. Für das ein-

1) Vgl. Jacobi: Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene. Gesammelte Werke. Bd. II. S. 407f.

schalige Hyperboloid muß in der Gleichung (I) ϱ durch ϱ_1 und ϱ_1 durch ϱ ersetzt werden. Für das zweimantlige Hyperboloid werden dagegen ϱ und ϱ_2 vertauscht. Die Substitutionen bleiben dieselben.

4. Kurven der konstanten Steigung $\frac{1}{i}$ auf der Rotationsfläche des Meridians: $x = a \sin\left[\frac{z}{a} \operatorname{tg} i\right]$. [1])

Die Rotationsfläche hat die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = a^2 \sin^2\left(\frac{z}{a} \operatorname{tg} i\right)$$

oder

$$r^2 = a^2 \sin^2\left(\frac{z}{a} k\right),$$

dazu $$dx^2 + dy^2 - k^2 dz^2 = 0.$$

Daraus erhalten wir die natürliche Gleichung der Projektion:

$$\varrho^2 (1 + k^2) = a^2 \sin^2\left(\frac{s}{a}\right).$$

Es läßt sich zeigen, daß die Projektion der Kreis

$$x^2 + y^2 = a\, y$$

ist. Der Kreis geht durch den Anfangspunkt, der Mittelpunkt liegt auf der z-Achse. Also: „Auf der Rotationsfläche, die die Kurve

$$x_0 = a \sin\left[\frac{z_0}{a} \operatorname{tg} i\right]$$

zum Meridian hat, sind die Schraubenlinien, deren Tangenten gegen die Rotationsaxe unter dem konstanten Winkel i geneigt sind, gemeine Schraubenlinien, und die Zylinder, auf denen sie geschrieben sind, enthalten die Axe.“ [2])

---

1) Vgl. auch S. 60.

2) Diesen Satz entwickelt G. Pirondini: Sulla teoria delle superficie di rivoluzione. Annali di Mat. (2) XVIII. 1890. Daß eine Schrauben-

5. Die Aoust'schen Schraubenlinien.[1])

Wenn man zu einer beliebigen Kurve den Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln konstruiert, zu dieser Kurve dann wieder die Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte bestimmt, so kann es vorkommen, daß die letzte Kurve der Ausgangskurve kongruent ist. Die Kurven mit dieser Eigenschaft tragen den Namen Aoust'sche Kurven, weil Aoust sie zuerst analytisch zu bestimmen suchte.

Jede Kurve hat mit ihrem Ort der Schmiegungskugelmittelpunkte parallele Hauptnormalen, die Binormalen der einen sind den Tangenten der andern und die Binormalen dieser den Tangenten jener parallel; daraus geht hervor, daß die zweite Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte mit der Urkurve parallele Tangenten, Hauptnormalen und Binormalen hat.

Für alle Kurven, die mit einer Kurve (X Y Z) parallele Tangenten haben, müssen die Beziehungen bestehen:

$$(1)\ x = \int \frac{\varrho}{R}\, dX;\ y = \int \frac{\varrho}{R}\, dY;\ z = \int \frac{\varrho}{R}\, dZ;\ s = \int \frac{\varrho}{R}\, dS,^{2})$$

wobei R der Krümmungsradius der Kurve (X Y Z) ist. Soll (X Y Z) eine beliebige, (x y z) eine Aoust'sche Kurve sein, so müssen also gleichzeitig die Gleichungen (1) mit der Gleichung gelten: $\varrho = -e \int (a\lambda + b\mu + c\nu)\, \frac{1}{\tau}\, ds.$

---

linie auf der durch Rotation der Sinuslinie entstandenen Fläche auf einem Kreiszylinder liegt, der als Basisradius die Hälfte vom Radius des Äquators besitzt und der durch die Rotationsaxe geht, erwähnt Dunesme: Sur quelques relations entre l'hélice et la cycloide; communiqué par M. Faye. Comptes Rendus 51. (1860) S. 890 ff.

1) Dieser Darstellung liegt die Abhandlung zu Grunde: E. Salkowski: Das Aoust'sche Problem der Kurventheorie. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 6. 1907.

2) Vgl. E. Salkowski: Zur Bestimmung der Raumkurven, für welche zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge eine gegebene Gleichung besteht. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 4. 1905. S. 64 ff.

Kombiert ergeben sie das Gleichungssystem:

$$(2)\quad \begin{cases} x = +e\int\frac{1}{R}\left(\int(a\lambda+b\mu+c\nu)\frac{dS}{\tau}\right)dX \\ y = +e\int\frac{1}{R}\left[\int(a\lambda+b\mu+c\nu)\frac{dS}{\tau}\right]dY \\ z = +e\int\frac{1}{R}\left[\int(a\lambda+b\mu+c\nu)\frac{dS}{\tau}\right]dZ. \end{cases}$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen der Aoust'schen Kurven lassen sich leicht die Aoust'schen Schraubenlinien bestimmen. Die Forderung, daß mehrere Kurven parallele Tangenten haben, ist identisch mit der, daß das Verhältnis von Krümmung und Torsion in den entsprechenden Punkten gleich ist. Wenn man also eine Schraubenlinie mit dem konstanten Verhältnis $\frac{\varrho}{\tau} = m$ der Radien beider Krümmungen kennt, so lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (2) alle andern Schraubenlinien, die dasselbe Krümmungsverhältnis m haben, bestimmen.

Die Gleichungen einer solchen Schraubenlinie sind aber sehr einfach zu erhalten; man stellt nur die Gleichungen der gemeinen Schraubenlinie auf, deren Tangenten die Mantellinien ihres Zylinders unter dem konstanten Winkel γ schneiden, der die Größe hat

$$\operatorname{tg}\gamma = m,$$

diese Helix hat dann die Gleichungen, wenn der Radius des Zylinders = 1 gesetzt wird:

$$X = \cos v, \quad Y = \sin v, \quad Z = m\,v.$$

Man erhält die allgemeinen Aoust'schen Schraubenlinien, wenn man diese Werte für X, Y, Z, R, τ, φ in die allgemeinen Gleichungen der Aoust'schen Kurven[1]) einsetzt.

Es ergibt sich für ϱ:

$$\varrho = \frac{e\,m}{(1+m^2)^2}\left[a\,m\cos v + m\,b\sin v - c\,v\right] + C.$$

1) Vgl. S. 68.

Durch abkürzende Benennung der Konstanten und Drehung des Koordinatensystems erhält man:

$$\varrho = 4\,A \sin v - 2\,B\,v + C.$$

Die Gleichungen (2) erhalten die Form:

$$x = -\int \frac{\sin v}{1 + m^2} (4\,A \sin v - 2\,B\,v + C)\,dv,$$

$$y = \int \frac{\cos v}{1 + m^2} (4\,A \sin v - 2\,B\,v + C)\,dv,$$

$$z = \int \frac{m}{1 + m^2} (4\,A \sin v - 2\,B\,v + C)\,dv;$$

nach der Integration:

$$x = \frac{1}{1 + m^2}\left[A(\sin 2v - 2v) + 2\,B \sin v + (C - 2\,B\,v)\cos v\right],$$

$$y = \frac{-1}{1 + m^2}\left[A \cos 2v + 2\,B \cos v - (C - 2\,B\,v)\sin v\right],$$

$$z = \frac{-m}{1 + m^2}\left[4\,A \cos v + B\,v^2 - C\,v\right].$$

Das sind die allgemeinen Gleichungen der Aoust'schen Schraubenlinien.

Unter ihnen erkennt man als besondere Kurven die Schraubenlinien auf einem Rotationsparaboloid mit vertikaler Axe,[1]) wenn $A = 0$; ferner die gemeine Schraubenlinie, wenn gleichzeitig $A = 0$ und $B = 0$.

Für $B = 0$ und $C = 0$ gleichzeitig erhalten wir die Gleichungen der Kurven konstanter Steigung auf einem parabolischen Zylinder mit horizontaler erzeugenden Geraden.

---

1) Vgl. S. 54 ff.

Anhang.

Die oskulierende Schraubenlinie.

Wir haben die gemeine Schraubenlinie als die einfachste unter allen Raumkurven erkannt; sie kann, wie die Gerade und der Kreis, in sich selbst verschoben werden, und sie hat während ihres ganzen Verlaufs konstante Krümmung und konstante Torsion.

Es liegt daher sehr nahe, eine Raumkurve in einem beliebigen Punkte mit der gemeinen Schraubenlinie zu vergleichen, wie man die ebene Kurve mit dem Kreise vergleicht.

Wenn man die gemeine Schraubenlinie zu bestimmen sucht, die eine Kurve in einem gegebenen Punkte in möglichst hoher Ordnung berührt, so findet man, daß es ∞^1 gemeine Schraubenlinien gibt, die die Kurve in zweiter Ordnung berühren; aber es gibt im allgemeinen keine gemeine Schraubenlinie, die eine Kurve in dritter oder höherer Ordnung berührt.[1]) Unter den ∞^1 Schraubenlinien hat

1) Diese Tatsache bringt zuerst Olivier: Mémoire de géométrie. Journal de l'école polytechnique. Cah. 24. 1835. Er hält es aber trotzdem für bequem und leicht, eine Kurve doppelter Krümmung mit einer gemeinen Schraubenlinie zur vergleichen, die er „hélice osculatrice" nennt. Die exakte Definition der Schmiegungsschraubenlinie als die gemeine Helix, die in ihrem ganzen Laufe dieselbe Krümmung und Torsion hat wie die Kurve in dem betrachteten Punkte, gibt De Saint-Venant: Mémoire sur les lignes courbes non planes. Journal de l'école polytechnique. Cah. 30. 1845. Prés. 1844. Die Aufgabe, die Krümmung einer beliebigen

aber eine eine innigere Berührung mit der Kurve, sie schmiegt sich enger an die Kurve als die andern, man kann sagen: sie hat mit der Kurve eine Berührung, deren Ordnung zwischen die zweite und dritte fällt. Das ist die Helix unter der Schar, die in ihrem Laufe die Krümmung und die Torsion hat, die die betrachtete Kurve in dem Punkte besitzt.[1]) Man nennt sie Schmiegungsschraubenlinie in Analogie zu dem Schmiegungskreis.[2])

Die Schmiegungshelix hat mit der Raumkurve die Tangente gemein, denn sie geht durch drei benachbarte Punkte der Kurve. Ferner besitzen die beiden Kurven in dem betrachteten Punkt eine gemeinsame rektifizierende Gerade und eine gemeinsame Schmiegungsebene. Der Radius des Orthogonalschnitts ist der Abstand des Zentralpunktes der Hauptnormalen vom Kurvenpunkte, und die Axe der Schmiegungshelix ist die Linie kürzesten Abstandes der Hauptnormalen von der folgenden Hauptnormalen. Die Schmiegungsebene schneidet den Zylinder in einer Ellipse. Die Axen der Zylinder aller Schmiegungshelixe bilden eine Fläche, deren Erzeugenden den rektifizierenden Geraden parallel sind. Diese Fläche ist im allgemeinen windschief und asymptotisch zur rektifizierenden Fläche.[3])

Raumkurve durch die einer Schraubenlinie zu messen, also für einen Punkt der Kurve die Schmiegungshelix zu bestimmen, löst allgemein Moesta: Über ein neues Krümmungsmaß für die Kurven im Raume. Dissertation Marburg 1849. Er wendet zum Schluß seine allgemeinen Ergebnisse auf die gewöhnliche zylindro-konische Schraubenlinie an.

1) Diese Feststellung über die Berührung der Kurve mit der Schmiegungshelix macht Schell: Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. 1. Auflage 1859. 2. Aufl. 1898.

2) Vgl. E. Cesàro: Note de géométrie. Mathésis, recueil math. III 1883. S. 98 ff. Ebenso wie bei den ebenen Kurven ein unendlich kleiner Bogen einer beliebigen Kurve als ein unendlich kleiner Kreisbogen angesehen werden kann, betrachtet man bei den Raumkurven ein unendlich kleines Stück als Bogen einer gemeinen Schraubenlinie.

3) Alle diese Sätze begegnen uns bei Schell a. a. O., zum Teil finden sie sich auch bei Ch. Ruchonnet: De l'hélice osculatrice. Nouvelles annales (2) 10. 1871; S. 444 ff. Ch. Ruchonnet: Exposition géométrique

Die Axe der Schmiegungshelix kann man die Zentralaxe der Kurve nennen. Von ihr lassen sich folgende Sätze aufstellen:

„Die Zentralaxe ist das gemeinsame Lot auf zwei benachbarte Hauptnormalen. Den Fußpunkt des gemeinsamen Lotes auf der Normale kann man das Zentrum der doppelten Krümmung nennen. Der Ort der Mittelpunkte doppelter Krümmung ist also die Striktionslinie der Normalenfläche." „Wenn die Kurve auf der rektifizierenden Fläche liegt, ist das Zentrum der doppelten Krümmung bezüglich eines Punktes M der Krümmungsmittelpunkt des ebenen Schnittes, der durch M senkrecht zu der geradlinigen Erzeugenden gemacht ist. Dieser Punkt ist also derselbe für alle geodätischen Linien, die durch M gehen. Da übrigens die Richtung der Zentralaxe diejenige der geradlinigen Erzeugenden ist, folgt, daß alle geodätischen Linien, die durch denselben Punkt einer abwickelbaren Fläche gehen, dieselbe Zentralaxe haben. Mit andern Worten: ihre oskulierenden Schraubenlinien im betrachteten Punkte sind auf demselben Zylinder gezeichnet." [1])

Wenn der betrachtete Punkt die gegebene Kurve entlang läuft, so beschreibt die Erzeugende des Zylinders der Schmiegungshelix im Ausgangspunkt eine abwickelbare Fläche, deren Gratlinie die Gleichung erfüllt:

$$r = \frac{\tau\sqrt{\tau^2+\varrho^2}}{\varrho\,d\tau - \tau\,d\varrho}\,ds,$$

wobei ϱ und τ Krümmungs- und Torsionsradius bedeuten.

---

des propriétés générales des courbes. 1. Aufl. Paris 1864. 2. Aufl. Paris 1874. Laurent: Mémoire sur la théorie des courbes gauches. Annales de l'école normale supérieure. (2) 1. 1872. E. Cesàro: Note de géométrie. Mathésis, recueil math. . . . III. 1883, S. 98ff. E. Cesàro: Sur l'helice osculatrice. Mathésis V. 1885. S. 32—33. R. Hoppe: Lehrbuch der analytischen Kurventheorie. 1880.

1) Diese Sätze bringt Cesàro: Sur l'hélice osculatrice. Mathésis V. 1885.

Diese Fläche ist die Enveloppe der Normalebenen zu den Oskulationsebenen der gegebenen Kurve, die durch die Tangente geführt werden, oder, mit anderen Worten: die Enveloppe der rektifizierenden Ebenen. Die Kurve selbst ist eine geodätische Linie dieser Fläche.

Wenn man auf der Hauptnormale in dem betrachteten Punkte der Kurve eine konstante Länge abträgt und durch den so erhaltenen Punkt eine Parallele zur Axe der oskulierenden Schraubenlinie zieht, so beschreibt diese Parallele eine abwickelbare Fläche, wenn der Punkt sich auf der Kurve bewegt.[1])

Über die Schar von ∞^1 gemeinen Schraubenlinien, die eine Kurve in einem Punkte in zweiter Ordnung berühren, läßt sich folgender Satz aussprechen: „Die Axen der gemeinen Schraubenlinien, die eine Kurve in einem Punkte P von allgemeiner Lage in zweiter Ordnung berühren, bilden ein Zylindroid, dessen Zylinderaxe die Hauptnormale von P ist, und dessen Zylinder die Ebene der Tangente und Binormale von P in demjenigen Kreise schneidet, der P als Mittelpunkt und den Krümmungsradius von P als Radius hat. Der Mittelpunkt des Zylindroids liegt in der Mitte zwischen P und dem Krümmungsmittelpunkt von P.“[2])

---

1) Vgl. Laurent a. a. O.

2) Vgl. Scheffers: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. I. Einführung in die Theorie der Kurven. 1. Aufl. 1901, 2. Aufl. 1910.

Literaturverzeichnis.

I. Werke über Geschichte der Mathematik, Enzyklopädien, Wörterbücher usw.

M. Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 4 Bde. 1. Aufl. 1898, 2. Aufl. 1908.

Chasles: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. Bruxelles 1837. Deutsch von Sohncke. Halle 1839.

S. Günther: Geschichte der Mathematik. Leipzig 1908.

G. A. Kaestner: Geschichte der Mathematik. 1800.

G. Loria: Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und jetzigen Entwicklung. Hist. Monographie. Deutsch von Fritz Schütte. Leipzig 1888. Italienisch in neuer Auflage 1908.

M. Marie: Histoire des sciences mathématiques et physiques. 12 Bde. 1884—85.

Montucla: Histoire des mathématiques. 2 Bde. 1758.

Zeuthen: Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Leipzig 1903.

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften:

H. v. Mangoldt: III D 1, 2. 1902.

G. Scheffers: Besondere transzendente Kurven III D 4. 1903.

J. S. Ersch: Literatur der Mathematik, Natur- und Gewerbekunde mit Inbegriff der Kriegskunst und anderer Künste seit der Mitte des 18. Jahrhunderts bis auf die neueste Zeit. Neue Auflage Leipzig 1828.

J. Rogg: Handbuch der mathematischen Literatur bis 1830. Tübingen 1830.

Poggendorf: Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften.

Hoffmann-Natani: Mathematisches Wörterbuch. 1867.

Catalogue of Scientific Papers: I—XII herausgeg. von Royal Society, London. Für die Zeit von 1800—1883. Begonnen 1867.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Paris. Gauthier Villars 1893—96.

Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik. Bd. 1—40, (1869—1909).

II. Bücher und Zeitschriftenartikel.

17. Jahrhundert.

Guido Ubaldi e Marchionibus Montis: De cochlea. Libri quatuor. Venetiis 1615.

B. Pascal: Dimension d'un solide formé par le moyen d'une spirale autour d'un cône. Ich zitiere nach: Oeuvres complets; éd. Hachette; t. III. S. 448 ff. (1880).

18. Jahrhundert.

Guido Grandi: Demonstratio theorematum Hugenianorum. 1701. (Brief an Ceva.)

Parent: Essais et Recherches de math. et de physique: 1702. Publiés en 1713.

Pitot: Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs appelée la compagne de la cycloïde. Nachschrift. Histoire et mémoires de l'académie royale des sciences. 1724.

Hermann: De epicycloidibus in superficie sphaerae descriptis. Ebenda 1728. S. 210 ff.

Clairaut: Des Épicycloïdes sphériques. Histoire de l'académie des sciences. 1732. S. 289 ff.

Jobann Bernoulli: Problème sur les épicycloïdes sphériques. Ebenda 1732. S. 237 ff.

De Maupertuis: Solution du mesme problème. Ebenda S. 255 ff.

F. Nicole: Manière de déterminer la nature des roulettes formées sur la superficie convexe d'une sphère. Ebenda 1732, S. 271 ff.

Pitot: Théorie de la vis d'Archimède. Histoire de l'ac. 1736.

A. G. Kaestner: Dissertationes math. et phys. Ad theoriam cochleae pertinens observatio geometrica. Altenburg 1771.

Euler: De curva rectificabili in superficie sphaerica. Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae XV. 1770. (Gedruckt 1771.)

Henricus Gulden: De helice; sive theoria helicis geometrice determinata, praxi et usui civili accommodato. Acta societatis Jablonovianae. Tomus V. Lipsiae. 1780.

Gerlachius: De cochlea. Ebenda 1780.

W. J. G. Karsten: Lehrbegriff der gesamten Mathematik. II. 2. Anfangsgründe der mathematischen Analysis und höhere Geometrie. Greifswald 1786.

Rode: Erläuterungen über Herrn Karstens math. Analysis und höhere Geometrie. Berlin 1789.

Monge: Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie. 1. Aufl. 1795. Die späteren Auflagen führen den Titel: Application de l'analyse à la géométrie. Ich benutzte 4. Aufl. 1809 und 5. Aufl. 1850 (herausgeg. von Liouville).

19. Jahrhundert.

Lancret: Mémoire sur les courbes à double courbure. Mém. prés. à l'institut des sciences, lettres et arts par divers savans et lus dans ses assemblées. Paris 1805; prés. en 1802.

Hachette: De la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre et de la surface hélicoïde des filets de la vis triangulaire. Correspondance sur l'école polytechnique III. 1814.

H. Umpfenbach: Analytische Geometrie II. Theorie der Raumkurven und Flächen. 1823.

Brandes: Lehrbuch der höheren Geometrie. II. Teil. 1824.

Garbinsky: Graphische Methode für die Tangenten an die konische Spirale. Annales de math. XVI. 1825 – 26. S. 167 ff.

1826. Cauchy: Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie. Paris 1826.

1827. W. Horn: Über die Keradoiden oder Spirallinien doppelter Krümmung. Crelles Journal 2.

Vallès: Annales de math. XVII. S. 158 ff.

1829. E. W. Grebe: De linea helice ejusque projectionibus orthographicis commentatio. Dissertation Marburg 1829.

Leroy: Analyse appliquée à la géométrie de trois dimensions. Paris 1829. 2. Aufl. 1835.

Leroy: Géométrie analytique dans l'espace. 1829. Deutsch von Kauffmann. 1840.

1835. A. Peters: Neue Kurvenlehre. Grundriß einer Umgestaltung der höheren Geometrie durch ihre ursprüngliche analytische Methode. Dresden.

Th. Olivier: Mémoire de géométrie. Journal de l'école polytechnique; cahier 24.

1837. Magnus: Aufgaben aus der analytischen Geometrie des Raumes. Berlin.

1838. C. F. A. Leroy: Die darstellende Geometrie. Deutsch von Kauffmann. Stuttgart.

1839. Steiner: Über einige allgemeine Eigenschaften der Kurven doppelter Krümmung. Berichte über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Berliner Akademie.

1842. E. W. Grebe: Über die Loxodromen auf dem gemeinen Zylinder und Kegel. Archiv 2.

Puiseux: Problème de géométrie. Journal de Liouville. VII. S. 65 ff.

1843. Olivier: Développements de géométrie descriptive. 1843. Ausgabe von J. J. Serret 1860.

1844. Olivier: Cours de géométrie descriptive. II^e partie. S. 202 ff.

Pressel: Quadratur der entwickelbaren Schraubenfläche. Archiv IV.

1845. De Saint-Venant: Mémoire sur les lignes courbes non planes. Journal de l'école polytechnique. Cah. XXX. S. 1 ff. prés. Sept. 1844.

1846. Boymann: Entwicklung der Gleichungen der Loxodromen auf den Flächen 2. Ordnung. Archiv 7.

1847. H. Molins: Sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface développable sur laquelle elles sont tracées. Journal de Liouville. XII.

1848. Bertrand: Sur la courbe dont les deux courbures sont constantes. Journal de Liouville XIII. S. 423 f.

Bonnet: Mémoire sur la théorie générale des surfaces. Journal de l'école polytechnique. Cah. 32.

1850. Bertrand: Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure. Journal de Liouville. XV.

1851. Puiseux: Sur la ligne dont les deux courbures ont entre elles un rapport constant. Journal de Liouville. XVI. S. 208.

J. A. Serret: Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. Journal de Liouville XVI. S. 197.

J. Dienger: Bestimmung der Länge der auf einen Kegel gewickelten Schraubenlinie. Archiv 16.

1852. Tissot: Sur les hélices. Nouv. Annales 11. S. 454 bis 459.

Voizot: Sur les courbes à double courbures. Journal de Liouville XVII.

Schell: Über die Schmiegungskugel und die sphärische Torsion der Kurven doppelter Krümmung. Archiv XIX.

1853. Grunert: Allgemeine Gleichungen der Loxodromen auf Rotationsflächen. Archiv 21.

1856. Schlömilch: Über Linien konstanter Steigung auf gegebenen Flächen. Zeitschrift für Math. u. Phys. 1. S. 205 ff.

A. H. Curtis: La surface engendrée par les normales principales d'une courbe à double courbure. Journal de Liouville (2) 1.

Molins: De la surface développable passant par une courbe donnée quelconque, et qui, par son développement, transformerait cette courbe en un arc de cercle de rayon donné. Journal de Liouville (2) 1. S. 265ff.

1859. W. Schell: Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Leipzig 1859. 2. wesentl. verm. Aufl. 1898.

1860. P. Serret: Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure. Paris.

Greer: Concerning Curves of Double Curvature. The quarterly Journal of Math. IV.

1863. Lamarle: Les applications du calcul différentiel à l'analyse et à la géométrie. Mémoires couronnés de l'Académie de Bruxelles XV.

1868. Karl Peterson: Über Kurven und Flächen. Deutsch bearbeitet vom Verfasser. Moskau—Leipzig.

1869. A. Enneper: Über die Loxodromen der Kegelflächen. Göttinger Nachrichten.

1870. A. Enneper: Zur Charakteristik der Helikoidflächen. Göttinger Nachrichten.

Th. Reye: Bemerkenswerte Eigenschaft der Schraubenlinie. Zeitschrift für Math. u. Phys. XV.

Ruchonnet: De l'hélice osculatrice. Nouv. annales (2) 10. S. 444—450.

1872. Laurent: Mémoire sur la théorie des courbes gauches. Annales de l'école normale supérieure. (2) 1.

Joachimsthal: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung. 1. Aufl. 1872. 2. Aufl. 1890.

1874. B. Pellissier: Solution de la question 1033. Nouv. annales (2) XIII, 294—295.

A. Laisant: Sur la loxodromie d'une surface de révolution quelconque. Nouv. ann. (2) 13.

1875. Ricart: Éléments de géométrie contenant quelques notions sur les courbes. Géométrie dans l'espace. Courbes usuelles. Paris, Garnier.

Catalan: Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces. Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique. 8.° XXIV.

Adolf Steen: Vindskaeve Kurvers Bestemmelse ved en Relation imellen Krumningsradius og Torsionsradius. Tidskrift for Mathematik. Tredie Raekke. Femte Aargang. Kjobenhavn 1875.

Zeuthen: Vindskaeve Kurver ved konstant Forhold mellem Krumningsradius og Torsionsradius. Ebenda.

1876. Catalan: Quelque théorèmes sur la courbure des courbes. Nouv. Corr. Math. II.

Aoust: Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace.

1877. Catalan: Théorie analytique des lignes à double courbure. Mémoire de Liège. VI. 1877.

1879. Hoppe: Untersuchungen über kürzeste Linien. Archiv 64. S. 72.

Appell: Sur une propriété caractéristique des hélices. Archiv. 64.

1880. Salmon: Analytische Geometrie des Raumes. II. Bearb. von Fiedler. 3. Aufl. 1879/80.

Hoppe: Lehrbuch der analytischen Kurventheorie.

1881. Enneper: Zur Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Göttinger Nachrichten. S. 291—301.

R. Hoppe: Das Aoust'sche Problem in der Kurventheorie. Archiv 66. S. 386 f.

Verstraeten und Mister: Courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un hélicoïde à plan directeur. Mathésis I. S. 49—51 und 137—139.

1882. A. Enneper: Zur Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Math. Annalen XIX. S. 78 ff.

A. Enneper: Über Flächen mit besonderen Meridiankurven. Göttinger Abhandlungen XXIX.

Allen: Notes on solid geometry. Messenger of math. (2) XII.

D. Edwardes, B. Easton: Solutions of question 6078. Educational times XXXVI.

S. Lie: Über die Bestimmung aller Raumkurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verknüpft sind. Christiania Forhandelinger 1882.

1883. E. Cesàro: Note de géométrie. Mathésis III. S. 98ff.

Franz Schiffner: Die developpable Fläche der konischen Schraubenlinie. Archiv 69.

Martin: Solution of question 4862. Educational Times 39.

1884. Lecornu: Sur les surfaces à pente uniforme et les réseaux proportionnels. Comptes Rendus. 98. S. 972—75.

1885. E. Cesàro: Sur l'hélice osculatrice. Mathésis V. S. 32—33.

G. Pirondini: Rettifica di un teorema e dimostratione di alcuni teoremi geometrici. Giornale di mat. 23.

1886. Cesàro: A proposito di un problema sulle eliche. Giornale di Mat. 24.

E. Cesàro: Sur l'emploi des coordonnées intrinsèques. Nouv. Ann. (3) 5.

1887. F. Schiffner: Die flache Kreisschraubenfläche. Archiv (2) VII.

G. Peano: Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale. Torino.

G. Pirondini: Sur les hélicoïdes. Nouv. ann. (3) VI.

1888. G. Pirondini: Sulle linee a doppia curvatura. Giornale di mat. 26. S. 104—132.

A. Petot: Sur les surfaces qui ont pour lignes de courbure d'un système des hélices tracées sur des cylindres quelconques. Comptes Rendus 106.

Jackstein: Ausdehnung eines von Puiseux für ebene Kurven behandelten Problems auf Raumkurven. Dissertation Halle.

Knoblauch: Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Leipzig.

1890. G. Pirondini: Sulla teoria delle superficie di rivoluzione. Annali di mat. (2) XVIII.

O. Stolz: Zur Theorie der Raumkurven. Monatshefte I. 1890. S. 433—42.

L. Lyon: Courbes à torsion constante. Annales de l'enseignement de Grenoble II. S. 416 ff.

1891. Bioche: Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe et coupent sous un angle constant la développable des tangentes. Bulletin de la société math. de France. 19.

Clebsch: Vorlesungen über Geometrie. Bearb. von F. Lindemann. IIa. Leipzig 1891.

Résal: Exposition de la théorie des surfaces. Paris.

1892. H. Résal: Sur les propriétés de la loxodromie d'un cône de révolution et leur application au ressort cônique. Comptes Rendus 114, S. 147—152.

G. Pirondini: Contatto e ortogonalità di due elicoidi. Rivista di matematica. 2.

P. Appell: Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Nouv. ann. (3) 11.

Sobotka: Über Krümmung und Indikatrizen der Helikoide. Wiener Sitzungsberichte 101.

Wangerin: Zur Theorie des Gauß'schen Krümmungsmaßes. Leipziger Berichte 45.

Stäckel: Dasselbe. Ebenda.

1893. M. Huth: Kurven konstanter Steigung auf gegebenen Flächen. Programm Nr. 578 der Realschule zu Stollberg i. Erzgebirge.

Kneser: Über die Frenet-Serret'schen Formeln und die analytische Unterscheidung rechts- und linksgewundener Raumkurven. Crelles Journal 113.

Sobotka: Einige Konstruktionen bezüglich der Schraubungsflächen. Wiener Berichte 102. S. 1204—1240.

Rohn und Papperitz: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig. 1. Aufl. 1893. 2. Aufl. 1906.

1894. Bianchi: Vorlesungen über Differentialgeometrie. Pisa. Deutsch von Lukat. Leipzig 1899. 2. Aufl. 1910.

Balitrand: Un problème sur les courbes gauches. Mathésis (2) IV.

1895. Hoppe: Die abwickelbare Schraubenfläche. Archiv (2) 4.
Heckhoff: Die Schraubenfläche konstanter mittlerer Krümmung. Zeitschrift 40.
1896. Buffone: Studio di un elica sferica e algebraica. Giornale di mat. 34.
L. Raffy: Sur une propriété caractéristique des hélicoides. Bulletin de la société math. 25, S. 125—126.
1897. G. Pirondini: Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable. Crelles Journal 118.
Louis Raffy: Leçons sur les applications géométriques de l'analyse. Éléments de la théorie des courbes et des surfaces. Paris.
R. Hoppe: Zur analytischen Kurventheorie. Archiv (2) 15.
A. zur Kammer: Zur Theorie der Kurven in analytischer Behandlungsweise. Archiv (2) 15.
G. Ricci: Lezione sulla teoria delle superficie. Verona-Padova.
1899. H. Piccioli: Une question de géométrie différentielle. Nouv. ann. (3) 1899. S. 454—459.
W. de Tannenberg: Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul infinitésimal. Paris.
G. Pirondini: Simmetria ortogonale rispetto a una linea qualunque. Giornale di Mat. 37. S. 212—288.
1900. G. Pirondini: Sur quelques lignes liées à l'hélice cylindrique. Crelles Journal. 121.
Issaly: Sur l'hélicoïde général. Nouv. ann. (3) 19.
A. Renfer: Über Schraubenlinien und Schraubenflächen. Dissertation Bern 1900.
E. Rouché et Ch. de Comberousse: Traité de Géométrie. II. Géométrie de l'espace; courbes et surfaces usuelles.
1901. G. Scheffers: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. I. Einführung in die Theorie der Kurven. 1. Aufl. 1901. 2. Aufl. 1910.
Cesàro: Geometria intrinseca. 1900. Deutsch von Gerhard Kowalewski. Leipzig.

M. d'Ocagne: Sur la détermination des plans tangents aux hélicoides gauches. Le matematiche pure ed applicate. 1. S. 82—85. (Nicht eingesehen.)

G. Pirondini: Generalizzazione di alcune proprieta dell'elica cilindro-conica ordinaria. Ebenda S. 244--254. (Nicht eingesehen.)

V. Strazzeri: Le eliche cilindriche. Sassari. Chiarella.

N. J. Hatzidakis: Om Centralaksen for Hovedtriedret af en Curve. Nyt Tidskrift for Mathematik 12 B.

1902. H. v. Mangoldt: Enzyklopädie der math. Wissenschaften III. 1, 2.

A. Hume: Meridian and transverse sections of helicoids of uniform pitch. The American Mathematical Monthly 9, S. 123ff.

Piccioli: Sur les hélices cylindriques dont les normales principales rencontrent une droite fixe. Nouv. ann. (4) II. 1902.

Duporcq: Remarque sur la note de Piccioli. Nouv. ann. (4) II. 1902.

G. Pirondini: Sur les normales d'un hélicoïde. Nouv. ann. (4) 2. S. 289ff.

1903. Scheffers: Besondere transzendente Kurven. Enzyklopädie der math. Wissenschaften III. D. 4.

Suchar: Sur une propriété appartenant à certaines hélices. Nouv. ann. (4) III. 1903.

V. und K. Kommerell: Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Sammlung Schubert XXIX. 1. Aufl. 1903. 2. Aufl. 1909.

1904. J. Bröhl: Doppelt unendliche Kurvenscharen, gebildet von Schraubenlinien der Rotationsflächenschar $x^2 + y^2 = u^2 e^{2z}$. Dissertation Münster.

G. Pirondini: Sui fasci d'elicoidi aventi l'asse in commune. Giornale 42, S. 1ff.

1905. Jonas: Kurven von konstanter Steilheit auf der Kugel. Archiv (3) 8.

Gérard: Sur l'hélicoide développable. Mathésis (3) 5. S. 241 ff.

C. Ruggeri: Le superficie modanate e le deformazioni infinitesime della elicoide. Giornale 43. S. 241 ff.

Ch. Renard: Sur la qualité des hélices sustentatrices. Comptes Rendus. 137.

1906. Epstein: Raumkurven u. Liniengeometrie. Archiv (3) 10.

E. J. Wilczynski: Projective differential geometry of curves and ruled surfaces. Leipzig.

1907. E. Salkowski: Das Aoust'sche Problem der Kurventheorie. Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft. 6, S. 54 ff.

Barré: Sur les hélices considérées comme génératrices d'une surface. Comptes Rendus. 144, S. 625 ff., 727 ff., 892 ff., 1097 ff., 1332 ff., 1079 ff., 1308 ff., 145, S. 161 ff., 364 ff.

Naito: Curves of Constant Inclination. Tôkyô Sûgaku-Buturigakkwai Kizi. Dai 2 Ki, Maki no IV. 1907—1908. S. 147 ff., 160 ff.

Ulisse Dini: Lezioni di Analisi infinitesimale. Vol. I. Calcolo Differenziale.

1908. W. Blaschke: Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. Monatshefte 19. S. 188 ff.

Egan: Note sur les courbes gauches. Nouv. ann. (4) 8. S. 500 ff.

Eva M. Smith: Some surfaces having a family of helices as one set of lines of curvature. Bulletin of the American Mathematical Society. (2) 15. S. 309 ff.

R. v. Lilienthal: Vorlesungen über Differentialgeometrie. I. Bd. Leipzig.

Medowcroft: On the curvature and torsion of a helix on any cylinder and on a surface of revolution. The London, Edinburgh and Dublin philos. magazine (6) XV. S. 55 ff.

E. Salkowski: Schraubenlinien und Loxodromen. Sitzungsberichte der Berl. math. Ges. 7. S. 83 ff.

P. Erfurth: Die Komplementärflächen der pseudosphärischen Schraubenfläche. Dissertation Halle.

R. W. Huppery: Analytische Untersuchung der allgemeinen Schraubenregelfläche. Dissertation Straßburg.

Keraval: Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Nouv. ann. (4) 9.

J. Belankin: Bemerkung über die Schraubenfläche. (Russisch.) Kiew: Polytechnisches Institut. 8. Nr. 1, 4. (Nicht eingesehen.)

F. G. Teixeira: Traité des courbes spéciales remarquables planes et courbes. Traduit de l'Espagnol par l'auteur. Paris 1908 und 1909.

1909. L. Pf. Eisenhart: A Treatise of the Differential Geometry of curves and surfaces. Boston.

1911. E. Barbé: Sur les surfaces minima engendrées par une hélice circulaire. Comptes Rendus 1911.

Inhalt.

Seite

Vorwort 5
Einleitung 7
I. Kapitel: Die gemeine Schraubenlinie . . . 8
1. Definition und analytische Darstellung . . . 8
2. Rektifikation 11
3. Schmiegungsebene und Tangente, Normalebene und Normalen der Schraubenlinie 11
4. Die Krümmung 15
a) Krümmung und Torsion 15
b) Die ganze Krümmung 18
c) Die sphärische Torsion 19
d) Ort der Krümmungsmittelpunkte und Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln . . . 19
5. Die Schraubenlinien als W-Kurven 21
6. Die Polarfläche, die Evoluten und die Evolventen 22
7. Die Böschungsfläche 24
II. Kapitel: Die allgemeine Schraubenlinie . . 29
1. Definition und analytische Darstellung . . . 29
2. Krümmung und Torsion 30
3. Andere charakteristische Eigenschaften . . . 35
4. Der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln 35
5. Die allgemeine Böschungsfläche 37
III. Kapitel: Spezielle Probleme 38
1. Die Schraubenlinien auf Kegeln 38
a) Definition und analytische Darstellung . . 38
b) Die Tangenten an die konische Spirale . . 41

Seite

c) Die Länge des Kurvenbogens 41
d) Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte der zylindro-konischen Helix 42
e) Die zylindro-konische Schraubenlinie als W-Kurve 43
f) Andere zylindro-konische Schraubenlinien . . 44
g) Die Tangentenfläche 47
2. Schraubenlinien auf Rotationsflächen zweiter Ordnung 48
a) Die sphärischen Schraubenlinien 48
b) Die Schraubenlinien auf dem Rotationsparaboloid 54
c) Die Schraubenlinien auf den Rotationsflächen zweiter Ordnung mit Mittelpunkt 58
3. Die Kurven konstanter Steigung auf dreiaxigen Flächen zweiter Ordnung 63
4. Kurven der konstanten Steigung $\frac{1}{i}$ auf der Rotationsfläche des Meridians:

$$x = a \sin\left[\frac{z}{a} \operatorname{tg} i\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 66$$

5. Die Aoust'schen Schraubenlinien 67
Anhang: Die Schmiegungsschraubenlinie 70
Literaturverzeichnis 74

Lebenslauf.

Am 18. Juni 1884 wurde ich, Frieda Gertrud Nugel, evang. Konfession, in Kottbus als Tochter des † Lehrers Arthur Nugel und seiner Frau Marie geb. Bombe geboren. Meine Schulbildung empfing ich zuerst von meinem Vater, dann in der städt. Mädchenmittelschule und später in der städt. höheren Mädchenschule und dem damit verbundenen Lehrerinnenseminar meiner Vaterstadt. Im März 1906 bestand ich an der Kgl. Elisabethschule in Berlin die Prüfung als Lehrerin für mittlere und höhere Mädchenschulen. Während einer $1\,^1/_4$ jährigen Tätigkeit als Hauslehrerin auf dem Rittergute Schorbus bei Kottbus bereitete ich mich unter der Leitung meines verehrten Lehrers, des Herrn Prof. Tiemann in Kottbus, dem ich stets zu Dank verpflichtet bin, zur Reifeprüfung vor, die ich im September 1907 an der Luisenstädtischen Oberrealschule in Berlin bestand. Seitdem widmete ich mich dem Studium der Mathematik, der Physik und des Deutschen, und zwar in Berlin W.-S. 1907/08, S.-S.1908 und W.-S. 1908/09; in München S.-S. 1909 und in Halle vom Beginn des W.-S. 1909/10 bis zum Ende des W.-S. 1911/12. Die mündliche Doktorprüfung bestand ich am 28. Februar 1912.

An den Vorlesungen und Übungen folgender Herren Professoren und Dozenten habe ich teilgenommen:

In Berlin:

Blasius, E. Fischer, Frobenius, Knoblauch, R. M. Meyer, Rubens, Schur, v. Seeler, Stumpf;

in München:

Bitterauf, v. Heigel, Lindemann, Voss;

in Halle:

Bremer, G. Cantor, Dorn, Fries, Gutzmer, Menzer, Meumann, Saran, Schenck, K. Schmidt, Strauch, Uphues, Wangerin.

Allen meinen verehrten Lehrern fühle ich mich zu dauerndem Dank verpflichtet.